

DAS MASSENKONSISTENTE AXIALSYMMETRISCHE
WOLKENMODELL HURMOD
WISSENSCHAFTLICHE DOKUMENTATION

von

Thomas Frisius¹ und Ulrike Wacker²

¹Institut für Atmosphäre und Umwelt, J. W. Goethe-Universität Frankfurt am Main

²Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung in der Helmholtz-Gemeinschaft

1. Einleitung

Dieser Bericht enthält eine ausführliche Beschreibung des numerischen Wolkenmodells HURMOD. Das Modell wurde in der Arbeitsgruppe Theoretische Meteorologie an der Universität Frankfurt a.M. entwickelt, um die Entstehung von tropischen Orkanen bei axialer Symmetrie zu simulieren. Die Modellsimulationen sollen zur Überprüfung von Hypothesen, die aus stark vereinfachten konzeptionellen Modellen (Frisius 2005, 2006) gewonnen wurden, dienen. Insbesondere soll die Rolle der Niederschlagsbildung bei der Zyklogenese untersucht werden. Dabei wird besonderen Wert auf eine detaillierte Wiedergabe des hydrologischen Zyklus und von konvektiven Strömungen gelegt. Um diesen Ansprüchen zu genügen, muss die räumliche Auflösung des Modells sehr hoch sein, was eine horizontale Maschenweite von höchstens 500m erfordert. Mit der zunehmenden Kapazität heutiger Hochleistungsrechner sind numerische Atmosphärenmodelle mit solch feiner Auflösung und entsprechend kleinen Zeitschritten möglich geworden.

In dem Modell HURMOD wird das thermohydrodynamische Gleichungssystem für ein Gemisch aus trockener Luft, Wasserdampf und flüssigem bzw. festem Kondensat gelöst. Dem liegt die Annahme zugrunde, dass die Atmosphäre als mehrkomponentiges mehrphasiges Kontinuum behandelt werden kann, und dass die stetigen und stetig differenzierbaren Feldfunktionen durch an Gitterpunkten definierte Größen hinreichend genau repräsentiert werden können. Um den zur Lösung des Gleichungssystems erforderlichen Rechenaufwand zu reduzieren, wird das zu integrierende Gleichungssystem in geeigneter Weise approximiert. Ob die jeweilige Approximation die Simulation erheblich oder nur unwesentlich beeinflusst, hängt u.a. von der Auflösung des Modells ab. Großskalige Modelle wie beispielsweise globale Zirkulationsmodelle operieren mit einer horizontalen Maschenweite von ca. 30 km und mehr, was die Verwendung von quasistatisch approximierten Gleichungen zulässt. Für hochauflösende Modelle konvektiver Strömungen wie HURMOD ist diese Approximation jedoch nicht angemessen.

Die HURMOD zugrunde liegenden Gleichungen werden so formuliert, dass sie die Entwicklung des kompressiblen Mediums Luft so genau wie möglich beschreiben. Dabei wird auch auf eine massenkonsistente Formulierung Wert gelegt, die in anderen Modellen nicht derart stringent durchgeführt ist. So werden z.B. in gängigen Atmosphärenmodellen zwar Niederschlag und Verdunstung an der Bodenoberfläche berücksichtigt, deren Wirkung auf die gesamte Masse der Atmosphäre wird aber vernachlässigt. Es ist im voraus nicht klar, welche Auswirkung diese Vernachlässigung auf modellierte atmosphärische Phänomene hat. In den Arbeiten von Wacker und Herbert (2003) und Wacker et al. (2006) wurde eine Formulierung der Massenkontinuitätsgleichungen im baryzentrischen Bezugssystem vorgeschlagen. In dieser Formulierung, welche in HURMOD Anwendung findet und wodurch Masseninkonsistenz vermieden wird, tritt der Effekt von Niederschlags- bzw. Verdunstungsmassenflüssen in Form einer unteren Randbedingung für die baryzentrische Vertikalgeschwindigkeit in Erscheinung.

HURMOD ist speziell auf die Simulation von idealisierten tropischen Orkanen und Konvektionswolken ausgerichtet. Dabei wird die horizontale Struktur vereinfachend als axialsymmetrisch angenommen. Da somit die Variablen nur noch von zwei räumlichen Koordinaten

abhängen, ist bei gegebener Rechenkapazität eine sehr kleine räumliche Schrittweite von unter einem Kilometer möglich.

Prozesse, die auf einer nicht mehr vom Modell auflösbaren Skala ablaufen, können nicht explizit mit dem Modell beschrieben werden. Wenn die Wirkung dieser Prozesse auf die Entwicklung des Gesamtsystems aber wichtig ist, muss sie anhand von Parametrisierungsmodellen beschrieben werden. Solche wichtigen subskaligen Prozesse sind mikroturbulenter Wirbelaustausch, Entstehen und Wachstum individueller Hydrometeore (im Folgenden mit den Stichwörtern Mikroturbulenz und Wolkenmikrophysik angesprochen) sowie Strahlungstransfer; die Parametrisierungsmodelle werden ebenfalls in dieser Dokumentation skizziert. Aufgrund der hohen räumlichen Auflösung, mit der HURMOD betrieben werden soll, können Wolken explizit aufgelöst werden; eine Parametrisierung konvektiver Prozesse ist daher nicht nötig. Strahlungseffekte werden in HURMOD nur in stark vereinfachter Form behandelt, weil ihr Einfluss auf kurzlebige Phänomene relativ gering ist.

Diese Dokumentation ist in 6 Abschnitte unterteilt. Abschnitt 2 enthält die Entwicklung der Modellgleichungen. In Abschnitt 3 wird das Parametrisierungsschema der Wolkenmikrophysik beschrieben, und Abschnitt 4 behandelt das Parametrisierungsschema für die Mikroturbulenz. In Abschnitt 5 wird die vom Modell verwendete vereinfachte Strahlungsparametrisierung angegeben. Abschnitt 6 enthält eine Beschreibung des numerischen Lösungsverfahrens.

2. Entwicklung der Modellgleichungen

Es wird eine Atmosphäre angenommen, die aus einem Gemisch von trockener Luft, Wasserdampf und Kondensat besteht. Als Kondensat wird nur flüssiges Wasser betrachtet, das wir in sedimentationsfreies Wolkenwasser und Regenwasser aufspalten. Die Masse M eines Luftvolumens V ist

$$M = M_d + M_v + M_c + M_r , \quad (1)$$

wobei M_d , M_v , M_c und M_r jeweils die Partialmassen von trockener Luft, Wasserdampf, Wolkenwasser und Regenwasser bezeichnen. Mit den Partialdichten $\rho_k = M_k/V$ gilt für die Dichte ρ des Gemisches

$$\rho = \rho_d + \rho_v + \rho_c + \rho_r . \quad (2)$$

ρ und ρ_k sind aufgrund der Kontinuumsannahme Feldfunktionen der Raum- und Zeitkoordinaten. Teilt man Gleichung (2) durch die Dichte, so erhält man für die Massenbrüche $m_k = \rho_k/\rho$ die Normierungsbedingung

$$1 = m_d + m_v + m_c + m_r . \quad (3)$$

Sowohl trockene Luft als auch Wasserdampf werden als ideale Gase angenommen. Das spezifische Volumen α setzt sich zusammen aus den spezifischen Volumina α_k der einzelnen Komponenten³

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = m_d \alpha_d + m_v \alpha_v + (m_c + m_r) \alpha_l , \quad (4)$$

wobei $\alpha_l \approx 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ das spezifische Volumen des als inkompressibel angenommenen Flüssigwassers ist. Nach der Zustandsgleichung für ideale Gase gilt

$$\alpha_d = \frac{R_d T}{p} , \quad \alpha_v = \frac{R_v T}{p} \quad (5)$$

und somit

$$\rho = \frac{p}{m_d R_d T + m_v R_v T + p(m_c + m_r) \alpha_l} , \quad (6)$$

³Im Folgenden werden Wasserdampf, Wolkenwasser und Regenwasser etwas nachlässig als 'Komponenten' bezeichnet, auch wenn es sich natürlich um mehrere Phasen derselben Komponente Wasser und bei den Flüssigwasseranteilen um eine Aufspaltung handelt.

wobei T die Temperatur, p den Druck sowie R_d und R_v jeweils die spezifischen Gaskonstanten für trockene Luft und Wasserdampf bezeichnen. Da das spezifische Volumen des Flüssigwassers sehr viel geringer ist als das der Gase und da m_c und m_r kleiner als m_v sind, wird die Näherung

$$\rho \approx \frac{p}{m_d R_d T + m_v R_v T} = \frac{p}{R_d T (1 + (R_v/R_d - 1)m_v - m_c - m_r)} = \frac{p}{R_d T_v} \quad (7)$$

verwendet. Hierin ist die virtuelle Temperatur T_v durch

$$T_v = T(1 + (1/\epsilon - 1)m_v - m_c - m_r) \quad (8)$$

definiert, wobei $\epsilon = R_d/R_v$.

Für die Masse jeder Komponente der Luft existiert eine Kontinuitätsgleichung. Verschiedene Formulierungsvarianten dieser Gleichungen werden in Wacker und Herbert (2003) diskutiert. Die folgende Darstellung orientiert sich an dieser Arbeit. In den Bilanzgleichungen für die Massen von Wasserdampf, Wolkenwasser und Regenwasser treten interne Quellen und Senken Q_k auf. Die Kontinuitätsgleichungen lauten:

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_d \mathbf{v}_d) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{v}_v) = Q_v, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_c \mathbf{v}_c) = Q_c, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_r \mathbf{v}_r) = Q_r, \quad (12)$$

mit $Q_v + Q_c + Q_r = 0$ wegen der Erhaltung der Gesamtmasse. In diesen Gleichungen bezeichnet der Vektor \mathbf{v}_k die mittlere Eigengeschwindigkeit der Komponente k ($k = d, v, c, r$). Werden diese Gleichungen summiert, so folgt die Kontinuitätsgleichung für die Gesamtmasse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13)$$

wobei $\mathbf{v} = m_d \mathbf{v}_d + m_v \mathbf{v}_v + m_c \mathbf{v}_c + m_r \mathbf{v}_r$ die baryzentrische Geschwindigkeit bezeichnet. Die Eigengeschwindigkeiten \mathbf{v}_k der Komponenten unterscheiden sich von der baryzentrischen

Geschwindigkeit \mathbf{v} infolge molekularer Diffusion bzw. im Fall von Regenwasser infolge Sedimentation. Innerhalb der Atmosphäre ist die molekulare Diffusion im allgemeinen vernachlässigbar. Anders ist die Situation nahe der Erdoberfläche, wo der durch Verdunstung an der Oberfläche in die Atmosphäre gelangte Wasserdampf durch molekulare Diffusion von der Berandung weg transportiert wird. Nimmt man die Erdoberfläche als eben an, sind sowohl der molekulare Wasserdampfdiffusionsfluss als auch der Sedimentationsfluss von Regenwasser vertikal gerichtet. Deshalb machen wir die Einschränkung, dass nur die Vertikalkomponenten w_k der Eigengeschwindigkeiten \mathbf{v}_k sich untereinander (und damit auch von der Vertikalkomponente w der baryzentrischen Geschwindigkeit \mathbf{v}) unterscheiden. Wir führen den vertikalen Diffusionsfluss J_k gemäß

$$J_k = \rho_k(w_k - w) \quad \text{für } k = d, v, c, r \quad (14)$$

ein, wobei der Sedimentationsfluss J_r einbezogen ist.

Mit diesen Annahmen lassen sich die Kontinuitätsgleichungen für die Partialmassen (9) - (12) als prognostische Gleichungen für die Massenbrüche schreiben:

$$\frac{\partial m_d}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla m_d = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (J_d) , \quad (15)$$

$$\frac{\partial m_v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla m_v = \frac{Q_v}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (J_v) , \quad (16)$$

$$\frac{\partial m_c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla m_c = \frac{Q_c}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (J_c) , \quad (17)$$

$$\frac{\partial m_r}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla m_r = \frac{Q_r}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (J_r) . \quad (18)$$

Für numerische Gitterpunktmodelle sind die Modellvariablen als Mittelwerte auf räumlichen und zeitlichen Skalen von der Größenordnung der Raum- und Zeitschritte zu interpretieren. Wir unterscheiden zwischen dem einfachen (Reynolds-) Mittel $\bar{\varphi}$ der Variablen φ und dem massengewichteten (Hesselberg-) Mittel $\hat{\psi} = \frac{(\rho\psi)}{\bar{\rho}}$ der Variablen. Die Variablen werden in Mittelwerte und Abweichungen zerlegt, also $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$ bzw. $\psi = \hat{\psi} + \psi''$. Mit dieser Interpretation sind die Größen $\bar{\varphi}$ und $\hat{\psi}$ die Modellvariablen, während φ' und ψ'' vom Modell nicht explizit beschrieben werden. $\bar{\varphi}$ und $\hat{\psi}$ werden auch als skalige Größen und φ' und ψ'' als subskalige Fluktuationen bezeichnet. Für das zugrunde liegende Ensemble-Mittel sollen die Operationen der Mittelung und der Differentiation vertauschbar sein.

Um prognostische Gleichungen für die skaligen Variablen zu erhalten, wird das grundlegende Gleichungssystem gemittelt. Durch Reynolds-Mittelung der Kontinuitätsgleichung (13) für die Gesamtmasse folgt dann

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \hat{\mathbf{v}}) = 0 , \quad (19)$$

und durch Mittelung der Kontinuitätsgleichungen (15) bis (18) für die Partialmassen folgt

$$\frac{\hat{D}\hat{m}_d}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{J}_d) + D_{m_d}, \quad (20)$$

$$\frac{\hat{D}\hat{m}_v}{Dt} = \frac{\bar{Q}_v}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{J}_v) + D_{m_v}, \quad (21)$$

$$\frac{\hat{D}\hat{m}_c}{Dt} = \frac{\bar{Q}_c}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{J}_c) + D_{m_c}, \quad (22)$$

$$\frac{\hat{D}\hat{m}_r}{Dt} = \frac{\bar{Q}_r}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{J}_r) + D_{m_r}. \quad (23)$$

Hierin bedeutet $\hat{D}\dots/Dt = \partial\dots/\partial t + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \dots$. D_{m_k} steht abkürzend für $D_{m_k} = -1/\bar{\rho} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{F}}_{m_k})$ und \mathbf{F}_{m_k} für

$$\mathbf{F}_{m_k} = \bar{\rho} \widehat{m_k''} \mathbf{v}_k''. \quad (24)$$

\mathbf{F}_{m_k} wird als turbulenter Massenfluss der Komponente k bezeichnet. Die Summe aller turbulenten Massenflüsse ist Null, d. h. $\sum_k \mathbf{F}_{m_k} = 0$.

Zur Formulierung der Impulsbilanz des Gesamtsystems starten wir von den Bilanzgleichungen des Impulses der Komponenten. Sie lauten im ungemittelten System:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k) = -\nabla \cdot \mathbf{P}_k - \rho_k f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_k + \mathbf{F}_{WWk} - g \rho_k \mathbf{k} \quad \text{für } k = d, v, c, r. \quad (25)$$

Hierbei bezeichnen \mathbf{P}_k den Spannungstensor, dessen Spannungen auf die Stoffkomponente k einwirken, \mathbf{F}_{WWk} die Wechselwirkungskraft der Stoffkomponente k mit anderen Substanzen, f den Coriolis-Parameter (der später konstant angenommen wird), g die Schwerkbeschleunigung und \mathbf{k} den Einheitsvektor in vertikaler Richtung. Bildet man die Summe, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) &= -\nabla \cdot \sum_{k=d,v,c,r} \mathbf{P}_k - \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{k=d,v,c,r} \frac{J_k^2}{\rho_k} \right) \mathbf{k} + \sum_{k=d,v,c,r} \mathbf{F}_{WWk} \\ &\quad - \rho f \mathbf{k} \times \mathbf{v} - g \rho \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (26)$$

Der Diffusionsterm auf der rechten Seite beschreibt die Divergenz eines Impulsflusses infolge der diffusiven Bewegungen der Bestandteile des Gemisches und trägt zur inneren Reibung bei. Da die Spannungstensoren \mathbf{P}_k nicht bekannt sind, fassen wir sie mit den Diffusionstermen $J_k J_k / \rho_k \mathbf{k} \mathbf{k}$ zusammen zum Gesamtspannungstensor $\mathbf{P} = \sum_{k=d,v,c,r} \left(\mathbf{P}_k + \frac{J_k^2}{\rho_k} \mathbf{k} \mathbf{k} \right)$. Wegen der geringen Bedeutung der molekularen Viskosität für das System Atmosphäre wird nur der Druckanteil in \mathbf{P} weiter berücksichtigt, also $\mathbf{P} = p(\mathbf{i} \mathbf{i} + \mathbf{j} \mathbf{j} + \mathbf{k} \mathbf{k})$ angenommen. Unter der Voraussetzung dass für das Gesamtsystem eine Cauchy-Gleichung gilt, verschwindet die Summe aller Wechselwirkungskräfte, d. h. $\sum_{k=d,v,c,r} \mathbf{F}_{WWk} = 0$.

Damit erhält man die Impulsbilanz in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p - \rho f \mathbf{k} \times \mathbf{v} - g \rho \mathbf{k}. \quad (27)$$

Die Mittelung der Impulsbilanz führt zu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \hat{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}}) = -\nabla \bar{p} - \bar{\rho} f \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{v}} - g \bar{\rho} \mathbf{k} - \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{v} \mathbf{v}''}), \quad (28)$$

und mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\frac{D \hat{\mathbf{v}}}{Dt} + f \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{p} - g \mathbf{k} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{v} \mathbf{v}''}). \quad (29)$$

Der Druckgradientterm soll noch umgeformt werden, so dass anstelle des Druckes die Exner-Funktion Π als Modellvariable auftritt. Die Exner-Funktion ist durch

$$\Pi = \left(\frac{p}{p_{00}} \right)^{\frac{R_d}{c_{pd}}}, \quad \text{mit } p_{00} = 1000 \text{ hPa} \quad (30)$$

definiert, wobei c_{pd} die spezifische Wärmekapazität für trockene Luft bei konstantem Druck bezeichnet. Die Exner-Funktion Π steht mit der potentiellen Temperatur θ in Verbindung. Es gilt

$$\theta = \frac{T}{\Pi}. \quad (31)$$

Die Zustandsgleichung (7) kann dann in folgender Form geschrieben werden:

$$\Pi = \left((1 + (1/\epsilon - 1)m_v - m_c - m_r) \frac{\rho R_d \theta}{p_{00}} \right)^{\frac{R_d}{c_{vd}}} = \left(\frac{\rho R_d \theta_v}{p_{00}} \right)^{R_d/c_{vd}} \quad (32)$$

mit der virtuellen potentiellen Temperatur $\theta_v = T_v/\Pi$. Diese Zustandsgleichung soll auch von den gemittelten Größen erfüllt werden, also

$$\bar{\Pi} = \left((1 + (1/\epsilon - 1)\hat{m}_v - \hat{m}_c - \hat{m}_r) \frac{\bar{\rho} R_d \hat{\theta}}{p_{00}} \right)^{\frac{R_d}{c_{vd}}} . \quad (33)$$

Für die Druckgradientbeschleunigung berechnet man

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{p} = \frac{R_d \hat{T}_v}{\bar{p}} \nabla \left(p_{00} \bar{\Pi}^{\frac{c_{pd}}{R_d}} \right) = c_{pd} \hat{\theta}_v \nabla \bar{\Pi} , \quad (34)$$

wobei $\hat{\theta}_v = \hat{T}_v/\bar{\Pi}$. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{D\hat{\mathbf{v}}}{Dt} + f\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{v}} = -c_{pd} \hat{\theta}_v \nabla \bar{\Pi} - g\mathbf{k} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{v}'' \mathbf{v}''}) . \quad (35)$$

Zur Vervollständigung des Gleichungssystems fehlt noch eine Gleichung für die Vorhersage der potentiellen Temperatur. Hierfür wird der erste Hauptsatz der Thermodynamik in Enthalpieform herangezogen. Dieser lautet:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{J}_h + \rho(Q_R + \Phi) , \quad (36)$$

wobei h die spezifische Enthalpie, Q_R die Erwärmungsrate aufgrund von Strahlung, Φ die Dissipationserwärmung und \mathbf{J}_h den diffusiven Enthalpie- oder Wärmefluss bezeichnen. Zu diesem Transport tragen die molekulare Wärmeleitung sowie der Wärmetransport infolge von Massentransporten bei. Letzterer wird in dem vorliegenden Modell durch die Sedimentation von Regentropfen sowie der Verdunstung an der Oberfläche hervorgerufen. Für eine ausführliche Behandlung des ersten Hauptsatzes und seiner Verwendung in Atmosphärenmodellen sei auf Herbert (2000) verwiesen. Die dort zugrunde gelegte Gleichung (8) stimmt bis auf zusätzliche Terme, welche die Arbeitsleistung aufgrund externer Kräfte beschreiben, mit Gleichung (36) überein. Diese Zusatzterme müssen hier allerdings nicht berücksichtigt werden, da als externe Kraft nur die konstante Schwerkraft wirken soll. Die Enthalpie lässt sich als thermodynamische Zustandsgröße in folgender Weise als Funktion des Drucks, der Temperatur und der Partialmassen darstellen:

$$h(T, p, m_d, m_v, m_c, m_r) = h_d(T, p)m_d + h_v(T, p)m_v + h_l(T, p)(m_c + m_r) , \quad (37)$$

wobei h_k die partielle spezifische Enthalpie ist. Daraus erhält man:

$$\frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial h}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} + h_d \frac{Dm_d}{Dt} + h_v \frac{Dm_v}{Dt} + h_l \left(\frac{Dm_c}{Dt} + \frac{Dm_r}{Dt} \right) , \quad (38)$$

wobei $c_p = c_{pd}m_d + c_{pv}m_v + c_{pl}(m_c + m_r)$. Die Koeffizienten $c_{pk} = \partial h_k / \partial T$ sind die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck. Einsetzen von (15)-(18) führt zu:

$$\frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial h}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{h_d}{\rho} \frac{\partial J_d}{\partial z} - \frac{h_v}{\rho} \frac{\partial J_v}{\partial z} - \frac{h_l}{\rho} \left(\frac{\partial J_c}{\partial z} + \frac{\partial J_r}{\partial z} \right) + \frac{l_v Q_v}{\rho}, \quad (39)$$

wobei $l_v = h_v - h_l$ die latente Wärme definiert, welche im Modell als Konstante angenommen wird. Da die Enthalpie eines idealen Gases nicht vom Druck abhängt und da der Massenanteil des Kondensats klein ist, vernachlässigen wir die Druckabhängigkeit der Enthalpie der Luft.

Mit (36) und (39) erhält man die Temperaturgleichung

$$c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{h_d}{\rho} \frac{\partial J_d}{\partial z} + \frac{h_v}{\rho} \frac{\partial J_v}{\partial z} + \frac{h_l}{\rho} \left(\frac{\partial J_c}{\partial z} + \frac{\partial J_r}{\partial z} \right) - \frac{l_v Q_v}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{J}_h + Q_R + \Phi, \quad (40)$$

oder in der Form

$$c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{l_v Q_v}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mathbf{J}_h - (h_d J_d + h_v J_v + h_l (J_c + J_r)) \mathbf{k}) - \frac{1}{\rho} (c_{pd} J_d + c_{pv} J_v + c_{pl} (J_c + J_r)) \frac{\partial T}{\partial z} + Q_R + \Phi. \quad (41)$$

Der dritte Term auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt die Konvergenz des sogenannten reduzierten Wärmeflusses, also des um die Wirkung von Massentransporten verringerten diffusiven Wärmeflusses dar. Dieser nicht an Massentransporte gebundene diffusive Wärmefluss wird, genau wie der viskose diffusive Impulstransport und die horizontalen Massenflüsse, in diesem Modell als vernachlässigbar gering angenommen. Dagegen werden die vertikalen diffusiven Massenflüsse J_k in den Massenbilanzen (9) bis (12) bzw. (20) bis (23) ausdrücklich berücksichtigt, weil (a) sie in Bodennähe den Transport dominieren und (b) der Niederschlagsfluss per se relevant ist.

Die Gleichung (41) ist eine prognostische Gleichung für die Temperatur T . Die individuelle Zeitableitung des Drucks stellt jedoch eine Unbekannte dar, die ohne Hinzufügung einer weiteren Gleichung nicht bestimmt werden kann. Dieses Problem tritt nicht mehr auf, wenn man anstelle der Temperatur die potentielle Temperatur als prognostische Variable verwendet. Die Umformung der Temperaturgleichung für das Gemisch aus Gas und Flüssigwasser zu einer prognostischen Gleichung für die potentielle Temperatur θ ist aber ohne eine

Näherung nicht möglich. Es wird folgende Näherung durchgeführt:

$$\begin{aligned}
\rho(c_{pd}m_d + c_{pv}m_v + c_{pl}(m_c + m_r)) &= \frac{p}{T} \frac{c_{pd}m_d + c_{pv}m_v + c_{pl}(m_c + m_r)}{R_d(1 + (1/\epsilon - 1)m_v - m_c - m_r)} \quad (42) \\
&= \frac{c_{pd}}{R_d} \frac{p}{T} \frac{1 + \left(\frac{c_{pv}}{c_{pd}} - 1\right)m_v + \left(\frac{c_{pl}}{c_{pd}} - 1\right)(m_c + m_r)}{1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1\right)m_v - m_c - m_r} \\
&\approx \frac{c_{pd}}{R_d} \frac{p}{T} \approx \frac{7}{2} \frac{p}{T}.
\end{aligned}$$

Diese Näherung ist sehr gut erfüllt: Falls $m_c, m_r = 0$ für $m_v = 10$ g/kg wird das Verhältnis $c_p/R = 3.508$ durch $c_{pd}/R_d = 3.5$ approximiert. Mit dieser Näherung (42) erhält man

$$\frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho(c_{pd}m_d + c_{pv}m_v + c_{pl}(m_c + m_r))} \frac{Dp}{Dt} \approx \frac{DT}{Dt} - \frac{R_d T}{c_{pd} p} \frac{Dp}{Dt} = \Pi \frac{D\theta}{Dt}. \quad (43)$$

Dann folgt für die θ -Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{D\theta}{Dt} &= \frac{1}{\Pi} \left(\frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{Dp}{Dt} \right) \\
&= -\frac{1}{c_p \rho \Pi} \left(l_v Q_v + (c_{pd} \bar{J}_d + c_{pv} \bar{J}_v + c_{pl}(\bar{J}_c + \bar{J}_r)) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{Q_R + \Phi}{c_p \Pi}. \quad (44)
\end{aligned}$$

Bei der Mittelung dieser Gleichung werden turbulente Fluktuationen von c_p , Π und J_x vernachlässigt. Daher drückt sich die Wirkung der turbulenten Durchmischung einzig in der Divergenz des turbulenten Wärmeflusses $\bar{\rho} \mathbf{v}'' \theta''$ aus. Damit folgt die $\hat{\theta}$ -Gleichung in der Form

$$\frac{\hat{D}\hat{\theta}}{Dt} = -\frac{1}{\hat{c}_p \hat{\rho} \hat{\Pi}} \left(l_v \bar{Q}_v + (c_{pd} \bar{J}_d + c_{pv} \bar{J}_v + c_{pl}(\bar{J}_c + \bar{J}_r)) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) + \frac{\hat{Q} + \hat{\Phi}}{\hat{c}_p \hat{\Pi}} - \frac{1}{\hat{\rho}} \nabla \cdot (\hat{\rho} \mathbf{v}'' \hat{\theta}''). \quad (45)$$

Die Gleichungen (13), (21)-(23), (33), (35) und (45) bilden die Grundgleichungen des Wolkenmodells. Im Folgenden werden die Mittelungsoperatoren $(\overline{\cdot})$ sowie $(\overline{\cdot})$ weggelassen.

Im Modell werden Druck, Temperatur, und spezifische Feuchte zerlegt in einen vertikal abhängigen Grundzustand und der dazugehörigen Abweichung:

$$\theta = \theta_0(z) + \theta^*, \quad \Pi = \Pi_0(z) + \Pi^*, \quad m_v = m_{v0}(z) + m_v^*. \quad (46)$$

Der Grundzustand wird so gewählt, dass er das hydrostatische Gleichgewicht erfüllt, also

$$c_{pd}\theta_{v0}\frac{\partial\Pi_0}{\partial z} = -g . \quad (47)$$

Damit berechnet man für die Summe aus vertikaler Komponente der Druckgradientkraft und Schwerkraft:

$$\begin{aligned} -c_{pd}\theta_v\frac{\partial\Pi}{\partial z} - g &= -c_{pd}\theta_v\left(\frac{\partial\Pi^*}{\partial z} - \frac{g}{c_{pd}\theta_{v0}}\right) - g \\ &= -c_{pd}\theta_v\frac{\partial\Pi^*}{\partial z} + g\left(\frac{\theta^*}{\theta_0} + \frac{\theta(\frac{1}{\epsilon} - 1)m_v^* - m_l}{\theta_0(1 + (\frac{1}{\epsilon} - 1)m_{v0})}\right) . \end{aligned} \quad (48)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite beschreibt den Auftrieb in einer Atmosphäre, deren Schichtung mit dem in (46) definierten Grundzustand übereinstimmt.

Im Modell werden die vertikalen Massendiffusionsflüsse näher spezifiziert und eingeschränkt. Zunächst sollen sich die trockene Luft, der Wasserdampf und das sedimentationsfreie Wolkenwasser mit derselben Geschwindigkeit bewegen und wir bezeichnen diese als v_d . Hiervon ausgenommen ist die Schicht nahe der Oberfläche. Hier findet die Verdunstung statt und es ist daher $w_v \neq w_d$. Wir führen den Wasserdampffluss $E = \rho_v(w_v - w_d)$ relativ zur Geschwindigkeit trockener Luft ein. Die Erdoberfläche wird als für trockene Luft undurchdringlich angesehen, $w_{d,s} = 0$. Daher ist E dort identisch mit dem Wasserdampffluss infolge von Verdunstung, $E_s = \rho_v w_v|_s$, und wir bezeichnen E_s auch als Verdunstungsrate oder -fluss. Das Regenwasser fällt mit der noch diagnostisch zu bestimmenden Sedimentationsgeschwindigkeit $W = w_r - w_d$ gegenüber der trockenen Luft. Folglich erhält man für die einzelnen Vertikalgeschwindigkeiten:

$$w_c = w_d , \quad w_r = w_d + W , \quad w_v = w_d + \frac{E}{\rho_v} , \quad w = w_d + m_r W + \frac{E}{\rho} \quad (49)$$

und für die Diffusionsflüsse:

$$\begin{aligned} J_d &= -\rho m_d m_r W - m_d E , & J_v &= (1 - m_v)E - \rho m_v m_r W , \\ J_c &= -\rho m_c m_r W - m_c E , & J_r &= \rho(1 - m_r)m_r W - m_r E . \end{aligned} \quad (50)$$

Da das Modell axialsymmetrische Wettersysteme beschreiben soll, ist die Verwendung von Zylinderkoordinaten (λ, r, z) sinnvoll. Bei axialer Symmetrie verschwindet die Ableitung

$\partial/\partial\lambda$. Bei der Transformation von dem kartesischen in das krummlinige Zylinderkoordinatensystem muss allerdings beachtet werden, dass die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten ortsabhängig sind. Die Vertikalkoordinate z bleibt von der Transformation unberührt. Die Transformation der Horizontalkoordinaten x, y in r, λ ist durch

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (51)$$

gegeben. Die orthogonalen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\lambda$ und \mathbf{e}_z der Zylinderkoordinaten lauten in Bezug auf die Einheitsvektoren \mathbf{i}, \mathbf{j} und \mathbf{k} im kartesischen Koordinatensystem

$$\mathbf{e}_r = \cos \lambda \mathbf{i} + \sin \lambda \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\lambda = -\sin \lambda \mathbf{i} + \cos \lambda \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}. \quad (52)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten in radialer, tangentialer und vertikaler Richtung u, v und w in Zylinderkoordinaten werden bezüglich dieser Basis formuliert:

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\lambda + w\mathbf{e}_z. \quad (53)$$

Der Nabla-Operator lautet in Zylinderkoordinaten

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (54)$$

Damit erhält man für die Divergenz eines Vektors \mathbf{G}

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{G} &= \frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial G_z}{\partial z} + \left(\frac{G_r}{r} \mathbf{e}_\lambda - \frac{G_\lambda}{r} \mathbf{e}_r \right) \cdot \mathbf{e}_\lambda \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r G_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial G_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (55)$$

wobei $\partial \mathbf{e}_r / \partial \lambda = \mathbf{e}_\lambda$ und $\partial \mathbf{e}_\lambda / \partial \lambda = -\mathbf{e}_r$. Die Impulsadvektion berechnet sich in Zylinderkoordinaten zu

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \left(u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\lambda + w\mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{v} \cdot \nabla u \mathbf{e}_r + \mathbf{v} \cdot \nabla v \mathbf{e}_\lambda + \mathbf{v} \cdot \nabla w \mathbf{e}_z + \frac{uv}{r} \mathbf{e}_\lambda - \frac{v^2}{r} \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (56)$$

Mit der Beziehung (56) können die 3 Komponenten der Bewegungsgleichung (35) in Zylinderkoordinaten hergeleitet werden.

Zum Abschluss dieses Kapitels wird das in dem axialsymmetrischen Modell verwendete Gleichungssystem nochmal zusammengestellt:

1. Bewegungsgleichung für den Radialwind

$$\frac{Du}{Dt} - \left(\frac{v}{r} + f \right) v = -c_{pd}\theta_v \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} + D_u , \quad (57)$$

2. Bewegungsgleichung für den Tangentialwind

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(\frac{v}{r} + f \right) u = D_v , \quad (58)$$

3. Bewegungsgleichung für den Vertikalwind

$$\frac{Dw}{Dt} = -c_{pd}\theta_v \frac{\partial \Pi^*}{\partial z} + \frac{g}{\theta_0} \left(\theta^* + \frac{\theta \left(\left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) m_v^* - m_c - m_r \right)}{1 + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) m_{v0}} \right) + D_w , \quad (59)$$

4. Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) , \quad (60)$$

5. Zustandsgleichung

$$\Pi = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) m_v - m_c - m_r \right) \frac{\rho R_d \theta}{p_{00}} \right)^{\frac{R_d}{c_{vd}}} , \quad (61)$$

6. Temperaturgleichung

$$\frac{D\theta}{Dt} = -\frac{1}{c_p \rho \Pi} \left(l_v Q_v + c_{pd} J_d \frac{\partial T}{\partial z} + c_{pv} J_v \frac{\partial T}{\partial z} + c_{pl} (J_c + J_r) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{Q_R + \Phi}{c_p \Pi} + D_\theta , \quad (62)$$

7. Bilanzgleichung für die Wasserdampfmasse

$$\frac{Dm_v}{Dt} = \frac{Q_v}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_v}{\partial z} + D_{m_v} , \quad (63)$$

8. Bilanzgleichung für die Wolkenwassermasse

$$\frac{Dm_c}{Dt} = \frac{Q_c}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_c}{\partial z} + D_{m_c}, \quad (64)$$

9. Bilanzgleichung für die Regenwassermasse

$$\frac{Dm_r}{Dt} = \frac{Q_r}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_r}{\partial z} + D_{m_r}. \quad (65)$$

Dabei bezeichnet D_G die Änderung der Variablen G aufgrund des turbulenten Austausches. Der Zeitableitungsoperator DG/Dt angewendet auf die Größe G lässt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (60) in der Form

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho G) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u G) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w G) \right)$$

schreiben. Im Modell wird diese Formulierung verwendet, weil die numerische Lösung des Gleichungssystems in dieser Form die Erhaltung integraler Größen besser annähert.

Es werden folgende Randbedingungen verwendet: Das Modell besitzt bei $z = 0$ und $z = H$ feste Ränder. Der untere Rand sei undurchlässig für trockene Luft. Jedoch wird durch Niederschlag und Verdunstung Wassermasse durch die Berandung transportiert. Die obere Berandung sei undurchdringlich für jegliche Masse. Daher gilt

$$\begin{aligned} w &= m_r W + \frac{E}{\rho} & \text{bei } z = 0 \\ w &= 0 & \text{bei } z = H. \end{aligned} \quad (66)$$

Aufgrund der axialen Symmetrie hat man zudem im Zentrum keine Horizontalbewegung:

$$u = v = 0 \quad \text{bei } r = 0. \quad (67)$$

Ein seitlicher Rand wird bei $r = R$ eingeführt. Er sei ebenfalls undurchdringlich für Masse, also

$$u = 0 \quad \text{bei } r = R. \quad (68)$$

Zur numerischen Lösung des Gleichungssystems müssen noch die Erzeugungsterme Q_v, Q_c, Q_r , die Sedimentationsgeschwindigkeit W (Wolkenmikrophysik), der Verdunstungsfluss E , die turbulenten Austauschterme D_G , die Dissipation Φ (infolge Mikroturbulenz) sowie die diabatische Wärmequelle Q_R (infolge Strahlung) geeignet parametrisiert werden.

3. Wolkenmikrophysik

Die Parametrisierung der wolkenmikrophysikalischen Erzeugungsterme Q_v , Q_c und Q_r erfolgt nach dem Schema, welches im Lokalmodell des Deutschen Wetterdienstes (DWD) für reine Wasserwolken verwendet wird (Doms und Schättler, 1999). Das Schema wurde ursprünglich von Kessler (1969) entwickelt. In diesem Schema wird das Tropfenensemble in kleine Wolkentropfen und große Regentropfen unterteilt. Dies hat den Vorteil, dass das Verhalten aller Tropfen einer Kategorie in ähnlicher Weise beschrieben werden kann. Es wird angenommen, dass die Wolkentropfen in der Luft schweben und ausschließlich mit dem Windfeld transportiert werden, wohingegen die Regentropfen auch sedimentieren.

Der Mikrozustand eines Ensembles von unterschiedlich großen Teilchen wird durch eine Größenverteilung beschrieben. Dabei bedeutet $f(D)dD$ die Anzahl der Partikel pro Volumeneinheit, deren Durchmesser in das Intervall $[D, D + dD]$ fallen. Für die Größenverteilung $f_r(D)$ der Regentropfen wird angenommen, dass sie stets einer Exponentialverteilung genügt:

$$f_r(D) = N_{0r} e^{-\lambda_r D} . \quad (69)$$

Diese sog. Marshall-Palmer-Verteilung enthält zwei Parameter, N_{0r} und λ_r , die noch zu spezifizieren sind. Eine Annahme über die Größenverteilung von Wolkentropfen ist in diesem Parametrisierungsmodell nicht erforderlich.

Des weiteren wird angenommen, dass sowohl das Wolkentropfenensemble als auch das Regentropfenensemble durch je eine einzige Variable charakterisiert werden sollen, und zwar durch die Partialdichte $\rho_{c,r}$ bzw. den Massenbruch $m_{c,r}$ von Wolkenwasser (c) bzw. Regenwasser (r). Dann muss jede Eigenschaft des Teilchenensembles auf diese eine Größe zurückgeführt werden. Dies impliziert beispielsweise, dass einer der beiden Parameter in der Marshall-Palmer-Verteilung (69) eine abhängige Größe ist oder konstant zu setzen ist, und dass die Anzahldichte als Funktion des Massenbruches ausgedrückt oder vorgegeben werden muss. Im Folgenden wird N_{0r} konstant gesetzt, so dass dann der Strukturparameter λ_r und der Massenbruch m_r eindeutige Funktionen voneinander sind:

$$m_r = \frac{N_{0r}}{\rho} \int_0^{\infty} M(D) e^{-\lambda_r D} dD = \frac{\pi \rho_w N_{0r}}{\rho} \lambda_r^{-4} , \quad (70)$$

wobei $M(D) = \rho_w \pi D^3 / 6$ die Masse eines Tropfens mit Durchmesser D und ρ_w die Dichte des Flüssigwassers bezeichnen.

In diesem Modell sind, da allein die Massenbrüche unabhängige Variablen sind, nur diejenigen Umwandlungsraten zu parametrisieren, die die Massenbrüche von Wolken- und/oder von Regenwasser verändern. Dies sind Nukleation, Kondensation an und Verdunstung von Wolkentropfen, Verdunstung von Regentropfen (während hier Kondensation vernachlässigt wird), Initiierung von Regentropfen durch Koagulation von Wolkentropfen untereinander (sog. Autokonversion) und Koagulationswachstum von Regentropfen durch Anlagerung

von Wolkentropfen (sog. Akkreszenz). Des weiteren ist der Sedimentationsfluss von Regenwasser zu parametrisieren.

Nukleation und Kondensationswachstum von Wolkentropfen finden in dem Modell statt, wenn die spezifische Feuchte m_v den Sättigungswert m_{vs} überschreitet. Verdunstung von Wolkentropfen findet statt, wenn die spezifische Feuchte m_v den Sättigungswert m_{vs} unterschreitet. Der Sättigungsdampfdruck (bei Vernachlässigung der Oberflächenkrümmung der Tropfen und Fremdstoffen im Wasser) wird über die Tetens's Formel

$$p_{vs} = 610.78 \text{Pa} \exp\left(17.27 \frac{T - 273.16}{T - 35.86}\right) \quad (71)$$

bestimmt. Da $m_v = \rho_v / \rho$, erhält man

$$m_{vs} = \frac{p_{vs} R_d}{p R_v} (1 + (1/\epsilon - 1)m_{vs} - m_c - m_r) . \quad (72)$$

Löst man diese Gleichung nach m_{vs} auf, so ergibt sich

$$m_{vs} = \frac{\epsilon p_{vs} (1 - m_c - m_r)}{p - (1 - \epsilon)p_{vs}} . \quad (73)$$

Das Modell verwendet keine Sättigungsadjustierung, wie man sie in vielen Atmosphärenmodellen findet. Stattdessen werden die Nukleations-, Kondensations- und Verdunstungsraten (im Folgenden vereinfachend Kondensationsrate S_{cv} genannt) in folgender Weise parametrisiert:

$$S_{cv} = \begin{cases} \frac{m_v - m_{vs}}{\tau_c} & \text{für } m_v \geq m_{vs} , \\ m_c \frac{m_v / m_{vs} - 1}{\tau_e} & \text{für } m_v < m_{vs} , \end{cases} \quad (74)$$

wobei τ_c und τ_e Zeitkonstanten für die Kondensation bzw. Verdunstung bezeichnen. Die Zeitkonstanten werden so klein gewählt, dass nur eine sehr geringe Übersättigung auftreten kann. Lediglich in Wolken, in denen die Vertikalgeschwindigkeit sehr hoch ist, kommt es aufgrund der adiabatischen Abkühlung aufsteigender Luftteilchen zu einer so raschen Abnahme von m_{vs} , dass die Kondensationsrate zum Abbau der Übersättigung nicht ausreicht. Solche Übersättigungen können jedoch auch in realen Konvektionswolken auftreten, weil Wolkentropfen nur mit einer begrenzten Rate anwachsen. Die Zeitskalen τ_c und τ_e richten sich nach der numerischen Zeitschrittlänge Δt . Um numerische Stabilität zu gewährleisten, muss $\tau_c \gg \Delta t$ sowie $\tau_e \gg \Delta t$ gelten.

Zur Beschreibung einer flachen Cumuluswolke reicht es aus, nur die Bildung und die Verdunstung von Wolkenwasser zu berücksichtigen, da in solchen Wolken selten Regentropfen entstehen. In einer hochreichenden Cumuluswolke dagegen werden aufgrund von Koagulationsprozessen größere Regentropfen mit nennenswerter Sedimentationsgeschwindigkeit gebildet.

Die Fallgeschwindigkeit eines Regentropfens relativ zu der ihn umgebenden Luft approximieren wir durch die einer beschleunigungsfreien Bewegung des Tropfens ('terminal fall velocity'). Sie hängt von dem Durchmesser ab und wird aus der empirischen Formel

$$V_r(D) = c_r D^{\frac{1}{2}} \quad (75)$$

berechnet, wobei $c_r = \text{const.}$ Für die Vertikalgeschwindigkeit des Massenschwerpunkts W des Regentropfenensembles relativ zur Bewegung trockener Luft erhält man also

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{\rho m_r} \int_0^{\infty} V_r(D) M(D) f_r(D) dD \\ &= -\frac{N_{0r}}{\rho m_r} \int_0^{\infty} V_r(D) M(D) e^{-\lambda_r D} dD = -\frac{N_{0r}}{\rho m_r} \frac{c_r \pi \rho_w \Gamma(4.5)}{6} \lambda_r^{-\frac{9}{2}}, \end{aligned} \quad (76)$$

wobei $\Gamma(x)$ die Gamma-Funktion bezeichnet. Die Variable λ_r kann mit Hilfe von (70) eliminiert werden. Der abwärts gerichtete Massensedimentationsfluss (oder Regenfluss) $P_r = -\rho m_r W$ folgt dann als

$$P_r = (\pi \rho_w N_{0r})^{-\frac{1}{8}} \frac{c_r \Gamma(4.5)}{6} (\rho m_r)^{\frac{9}{8}}. \quad (77)$$

Der Massensedimentationsfluss von Wolkenwasser ist Null, weil sich Wolkentropfen stets mit der Geschwindigkeit trockener Luft bewegen sollen.

In dem Parametrisierungsmodell werden Regentropfen durch Koagulation von Wolkentropfen initiiert. Dieser Prozess wird als Autokonversion (von Wolkentropfen) bezeichnet. Erforderlich ist die Beteiligung hinreichend großer Wolkentropfen. Als Parametrisierungsgleichung für die Autokonversionsrate S_{Aut} verwenden wir den linearen empirischen Ansatz von Kessler (1969):

$$S_{Aut} = \begin{cases} \frac{m_c - m_{c0}}{\tau_{aut}} & \text{für } m_c \geq m_{c0} \\ 0 & \text{für } m_c < m_{c0} \end{cases}. \quad (78)$$

τ_{aut} ist die Zeitskala für den Autokonversionsprozess. m_{c0} bezeichnet einen kritischen Wolkenwassergehalt; Autokonversion wird also nur wirksam, wenn dieser Schwellwert überschritten wird. Damit wird der Erfahrung Rechnung getragen, dass in Wolken mit geringem

Wassergehalt kein Niederschlag entsteht. Der Ansatz (78) ist also so zu interpretieren, dass nach dem Überschreiten des kritischen Wertes der Überschuss $m_c - m_{c0}$ mit der Abklingrate $1/\tau_{aut}$ in Regenwasser umgewandelt wird.

Sobald Regentropfen entstanden sind, können sie beim Fallen mit Wolkentropfen kollidieren, wobei größere Regentropfen entstehen. Durch diesen Akkreszenzprozess wird Wolkwasser sehr effizient in Regenwasser umgewandelt. Nehmen wir an, dass jeder Regentropfen mit Masse M und Durchmesser D pro Zeiteinheit mit einer gewissen Anzahl an Wolkentropfen der Masse M_c und Durchmesser D_c kollidiert. Dann erhalten wir die Massenänderungsrate des Regentropfens

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{Akk} = \int_0^{\infty} K(D_c, D) f_c(D_c) M_c dD_c . \quad (79)$$

Hierin bedeutet $f_c(D_c)$ die Größenverteilung von Wolkentropfen. Die Koagulationsfunktion oder der 'Kernel' $K(D_c, D)$ gibt das effektive Einfangvolumen pro Zeit an. Die Koagulationsfunktion wird aus der Überlegung bestimmt, dass innerhalb eines Zeitintervalls dt ein fallender Regentropfen mit allen Wolkentropfen kollidieren kann, die sich in einem Zylinder mit der Querschnittsfläche $(\pi/4)(D_c + D)^2$ und der Länge $V_r(D)dt$ befinden. Die Anzahl der Wolkentropfen im Durchmesserintervall dD_c in diesem Volumen beträgt $\pi/4 V_r(D)(D_c + D)^2 f_c(D_c) dD_c dt$. Daraus resultiert die Koagulationsfunktion zu

$$K(D_c, D) = E_c \frac{\pi}{4} (D_c + D)^2 V_r(D) . \quad (80)$$

Hierin ist noch die Kollektionseffizienz $E_c (> 0)$ eingeführt; durch diesen Korrekturfaktor wird der Tatsache Rechnung getragen, dass (a) nicht jede Kollision der Tropfen auch zu einer Verschmelzung führt und dass (b) die Trajektorien der Tropfen durch Turbulenz und eventuelle elektrische Ladungen beeinflusst werden, so dass das tatsächliche Einfangvolumen von dem Wert $(\pi/4)(D_c + D)^2 V_r(D)dt$ abweichen kann.

Eine Durchmesserabhängigkeit der Kollektionseffizienz wird hier nicht berücksichtigt und zudem wird die Näherung $(D_c + D)^2 \approx D^2$ verwendet, da die Wolkentropfen im Vergleich zu den Regentropfen einen kleinen Durchmesser besitzen. Daher erhält man

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{Akk} = \frac{\pi}{4} E_c D^2 V_r(D) \rho m_c . \quad (81)$$

Die Verwendung der Marshall-Palmer Verteilung für die Regentropfen führt zu der Akkreszenzrate S_{Akk} in der Form:

$$\begin{aligned} S_{Akk} &= \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \left. \frac{dM}{dt} \right|_{Akk} f_r(D) dD \\ &= \frac{\pi N_{0r} E_c}{4} m_c \int_0^{\infty} D^2 V_r(D) e^{-\lambda_r D} dD = \frac{\pi N_{0r} E_c}{4} m_c c_r \Gamma(3.5) \lambda_r^{-\frac{7}{2}} . \end{aligned} \quad (82)$$

Einsetzen von (70) gibt

$$S_{Akk} = \frac{\pi N_{0r} E_c}{4(\pi \rho_w N_{0r})^{\frac{7}{8}}} c_r \Gamma(3.5) m_c (\rho m_r)^{\frac{7}{8}} . \quad (83)$$

Schließlich muss noch die Verdunstung von Regentropfen in untersättigter Luft beschrieben werden. Wenn ein Tropfen verdunstet, wird der Wasserdampf durch Diffusion vom Tropfen weg transportiert. Die Massenänderungsrate ist also gleich dem radial nach außen gerichteten Wasserdampffluss F_v auf der gesamten Tropfenoberfläche; bei Annahme von Kugelsymmetrie gilt also

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{Verd.} = -\pi D^2 F_v . \quad (84)$$

Der Fluss an der Tropfenoberfläche ist durch

$$F_v = \frac{\kappa_v \rho (m_{vs}(T_w, p) - m_v)}{D/2} \quad (85)$$

gegeben. Diese Gleichung begründet sich aus dem Ansatz eines zum Gradienten der Größe proportionalen molekularen Diffusionsflusses und der Radialsymmetrie. $m_{vs}(T_w, p)$ und m_v bedeuten die Massenbrüche von Wasserdampf an der Tropfenoberfläche und in der ungestörten Umgebung des Tropfens, und T_w ist die Temperatur an der Tropfenoberfläche. κ_v ist der Diffusionskoeffizient von Wasserdampf in Luft.

Einsetzen von (85) in (84) liefert die Massenänderungsrate als Funktion von Temperatur, Feuchtegehalt und Tropfeneigenschaften:

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{Verd.} = -2\pi D \rho \kappa_v (m_{vs}(T_w, p) - m_v) . \quad (86)$$

Die Rate ist hier so definiert, dass bei Verdunstung $\left. \frac{dM}{dt} \right|_{Verd.} < 0$ gilt. In (86) ist allerdings die Temperatur T_w an der Tropfenoberfläche noch offen. Ihre Berechnung als Funktion der Bedingungen in der ungestörten Umgebung erfordert einen Schließungsansatz. Dazu nehmen wir an, dass die bei der Verdunstung entzogene latente Wärme sofort und vollständig durch einen Wärmefluss F_q zum Tropfen ausgeglichen wird, so dass die Temperatur des Tropfens konstant bleibt. D.h. $-l_v dM/dt|_{Verd.}$ ist gleich dem über die Tropfenoberfläche integrierten Wärmefluss F_q . Hieraus folgt

$$\begin{aligned} l_v \left. \frac{dM}{dt} \right|_{Verd.} &= -\pi D^2 F_q \\ &= -2\pi D \rho c_p \kappa_T (T - T_w) . \end{aligned} \quad (87)$$

T ist die Temperatur in der ungestörten Umgebung des Tropfens und κ_T ist der Wärmeleitkoeffizient. Wir vereinfachen die Abhängigkeit des Sättigungswertes m_{vs} an der Tropfenoberfläche von T_w durch eine Linearisierung um T , d.h.

$$m_{vs}(T_w, p) \approx m_{vs}(T, p) + \left. \frac{\partial m_{vs}}{\partial T} \right|_T (T_w - T). \quad (88)$$

Mit der Clausius-Clapeyron Gleichung

$$\frac{dp_{vs}}{dT} = \frac{l_v p_{vs}}{R_v T^2} \quad (89)$$

ergibt sich

$$m_{vs}(T_w, p) \approx m_{vs}(T, p) \left(1 + \frac{l_v}{R_v T^2} (T_w - T) \right). \quad (90)$$

Man eliminiert nun $T_w - T$ in (90) mit Hilfe von (87) und setzt den resultierenden Ausdruck für $m_{vs}(T_w, p)$ in (86) ein. Auflösen nach dM/dt liefert schließlich die gesuchte Verdunstungsrate eines Tropfens der Masse M in der Form

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{Verd.} = -2\pi D \rho \frac{\kappa_v (m_{vs}(T, p) - m_v)}{1 + \frac{\kappa_v}{\kappa_T} \frac{l_v^2 m_{vs}}{c_p R_v T^2}}. \quad (91)$$

Künftig wird $m_{vs}(T, p)$ als m_{vs} bezeichnet.

Bisher wurde ein ruhender Tropfen vorausgesetzt. Die Bewegung des Regentropfens verursacht jedoch Ventilationseffekte, die die Transporte von Wasserdampf und Wärme verstärken, und zwar umso mehr, je höher die Reynolds-Zahl Re ist. Dieser Ventilationseffekt kann berücksichtigt werden, indem formal die κ -Koeffizienten durch die modifizierten Koeffizienten

$$\kappa_{v,T} \longrightarrow \kappa_{v0,T0} (1 + 0.26 Re^{\frac{1}{2}}) = \kappa_{v0,T0} \left(1 + 0.26 \left(\frac{DV_r(D)\rho}{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (92)$$

ersetzt werden. Dabei bezeichnet η die dynamische Zähigkeit von Luft.

Die (integrale) Verdunstungsrate für das gesamte Ensemble der Regentropfen erhält man durch Integration über die mit der Tropfengrößenverteilung (69) multiplizierte Verdunstungsrate (91) einzelner Tropfen:

$$\begin{aligned}
 S_{Verd} &= - \int_0^{\infty} \frac{dM}{dt} \Big|_{Verd.} f_r(D) dD \\
 &= \frac{2\pi N_{0r} \kappa_{v0} (m_{vs} - m_v)}{1 + \frac{\kappa_v}{\kappa_T} \frac{l_v^2 m_{vs}}{c_p R_v T^2}} \int_0^{\infty} \left(D + 0.26 D \left(\frac{D V_r(D) \rho}{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \right) e^{-\lambda_r D} dD \\
 &= \frac{2\pi N_{0r} \kappa_{v0} (m_{vs} - m_v)}{1 + \frac{\kappa_{v0}}{\kappa_{T0}} \frac{l_v^2 m_{vs}}{c_p R_v T^2}} \left(\lambda_r^{-2} + 0.26 \left(\frac{c_r \rho}{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2.75) \lambda^{-11/4} \right). \quad (93)
 \end{aligned}$$

S_{Verd} ist so definiert, dass bei Verdunstung $S_{Verd} > 0$ gilt.

Nachdem man mit (70) λ_r eliminiert hat, folgt schließlich

$$S_{Verd} = \left(\frac{N_{0r} \pi}{\rho_w} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2\kappa_{v0} (m_{vs} - m_v)}{1 + \frac{\kappa_{v0}}{\kappa_{T0}} \frac{l_v^2 m_{vs}}{c_p R_v T^2}} (\rho m_r)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 0.26 \left(\frac{c_r \rho}{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \Gamma(2.75) \left(\frac{\rho m_r}{\pi \rho_w N_{0r}} \right)^{\frac{3}{16}} \right). \quad (94)$$

Damit sind alle aus der Wolkenmikrophysik resultierenden Umwandlungsterme bestimmt. Die verwendeten Konstanten sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

Parameter	Wert
N_{0r}	$8 \times 10^6 \text{ m}^{-4}$
ρ_w	10^3 kg/m^3
c_r	$130 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$
τ_{aut}	10^3 s
τ_c	15 s
τ_e	15 s
m_{c0}	10^{-3}
E_c	0.8
κ_{v0}	$2.21 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
$\rho c_p \kappa_{T0}$	$2.4 \times 10^{-2} \text{ J}/(\text{m s K})$
η	$1.7 \times 10^{-5} \text{ N s}/(\text{m}^2)$

Mit diesen Werten kann man die Parametrisierungsgleichungen schreiben als:

$$W = -12.6301 (\rho m_r)^{\frac{1}{8}}, \quad (95)$$

$$S_{Aut} = \text{Max} \left(0, \frac{m_c - 0.001}{1000} \right), \quad (96)$$

$$S_{Akk} = 1.7242 m_c (\rho m_r)^{\frac{7}{8}}, \quad (97)$$

$$S_{Verd} = 0.007 (m_{vs} - m_v) \sqrt{\rho m_r} \frac{1 + 9.1737 \sqrt{\rho} (\rho m_r)^{\frac{3}{16}}}{1 + 9.21 \cdot 10^{-4} \frac{l_v^2 \rho m_{vs}}{R_v T^2}}. \quad (98)$$

Hierin sind alle Größen in SI-Einheiten anzugeben.

Die Quellterme Q_v , Q_c und Q_r in (63) bis (65) setzen sich aus mehreren Umwandlungsra-
ten zusammen,

$$\frac{Q_v}{\rho} = -S_{cv} + S_{Verd}, \quad (99)$$

$$\frac{Q_c}{\rho} = S_{cv} - S_{Aut} - S_{Akk}, \quad (100)$$

$$\frac{Q_r}{\rho} = -S_{Verd} + S_{Aut} + S_{Akk}, \quad (101)$$

und erfüllen die Massenerhaltung, $Q_v + Q_c + Q_r = 0$.

4. Mikroturbulenz

Die Parametrisierung der mikroturbulenten Austauschterme D_u , D_v , D_w , D_θ , D_{m_v} , D_{m_c} und D_{m_r} richtet sich nach dem Schema, welches in dem Hurrikanmodell von Rotunno und Emanuel (1987) verwendet wurde.

Räumliche Änderungen der mittleren Dichte werden bei der Turbulenzparametrisierung generell vernachlässigt. Daher wird angenommen, dass

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \widehat{\mathbf{v}'' \mathbf{G}''}) = \nabla \cdot (\widehat{\mathbf{v}'' \mathbf{G}''}) \quad (102)$$

gilt.

Zunächst wird der turbulente Austausch von Impuls parametrisiert. Man nimmt nach dem Wirbelviskositätskonzept (in Analogie zur molekularen Viskosität) an, dass der Reynolds-Spannungstensor proportional zum Gradienten der mittleren Geschwindigkeit plus deren transponierter Dyade ist, also

$$-\widehat{\mathbf{v}'' \mathbf{v}''} = \nu (\nabla \mathbf{v} + [\nabla \mathbf{v}]^T), \quad (103)$$

wobei T die Transponierung symbolisiert. ν ist der turbulente Austauschkoeffizient für Impuls. Im Hinblick auf spätere zusätzliche Approximationen wird er bereits hier vereinfachend als skalare Größe eingeführt. Die Summierung in (103) ist sinnvoll, um die Symmetrie des Reynolds-Spannungstensors zu erhalten. Man bezeichnet den dyadischen Tensor $\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T$ als Deformationstensor, welcher in Zylinderkoordinaten bei Annahme von axialer Symmetrie durch

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} + [\nabla \mathbf{v}]^T &= 2 \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\lambda + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z \\ &\quad + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_r + 2 \frac{u}{r} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_z \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\lambda + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (104)$$

gegeben ist. Wendet man den Divergenzoperator auf diesen Tensor an, so erhält man für die turbulenten Austauschterme:

$$\begin{aligned} D_u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(2\nu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - 2\nu \left(\frac{u}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right), \\ D_v &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ D_w &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu r \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (105)$$

Man beachte, dass bei der Differentiation die aus den Einheitsvektoren gebildeten Dyaden mitdifferenziert werden müssen.

Für den turbulenten Fluss $\widehat{\mathbf{v}''G''}$ mit $G = \theta, m_v, m_c, m_r$ wird ebenfalls eine Fluss-Gradientbeziehung angenommen, d.h.

$$-\widehat{\mathbf{v}''G''} = \kappa \nabla G, \quad (106)$$

wobei κ der turbulente Austauschkoefizient ist, der für alle skalaren Feldfunktionen $G = \theta, m_v, m_c$ oder m_r den gleichen Wert besitzen soll. Hinsichtlich der turbulenten Massenflüsse $\mathbf{F}_{m_k} = \widehat{\rho m_k'' \mathbf{v}_k''} = -\widehat{\rho \kappa \nabla \hat{m}_k}$ erfüllt dieser Ansatz die in Kapitel 2 angesprochene Nebenbedingung $\sum_{k=d,v,c,r} \widehat{\mathbf{v}_k'' m_k''} = 0$, denn es gilt $\sum_{k=d,v,c,r} \kappa \nabla m_k = 0$. Aus (106) erhält man den turbulenten Austauschterm D_G in Zylinderkoordinaten in der Form:

$$D_G = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial G}{\partial z} \right). \quad (107)$$

Nun müssen noch die Austauschkoefizienten berechnet werden. Die Parametrisierung richtet sich nach der Arbeit von Klemp und Wilhelmson (1978). In dieser Arbeit wird die prognostische Gleichung für die turbulente kinetische Energie (TKE) verwendet, jedoch wird hier ein Gleichgewicht aus Quell- und Senkentermen angenommen. Mit Hilfe des TKE-Spektrums im Trägheitsbereich ergibt sich dann der turbulente Austauschkoefizient. Zur Herleitung der TKE-Gleichung unterziehen Klemp und Wilhelmson die Bewegungsgleichung einer Boussinesq-Approximation, d.h. Dichteveriationen werden nur in dem Auftriebsterm berücksichtigt. Die Boussinesq-Approximation erweist sich als eine gute Näherung für die Dynamik der Mikroturbulenz (Holton 1992). Zudem wird in der Bewegungsgleichung die viskose Reibungskraft \mathbf{F}_V aufgrund von molekularen Austauschprozessen berücksichtigt, da diese Kraft bei mikroturbulenten Wirbeln Relevanz besitzt. Daher erhält man, wenn man diese Kraft zu Gl. (27) hinzuaddiert und die Boussinesq-Approximation durchführt:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + f \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p^* - g \frac{\rho^*}{\rho_0} \mathbf{k} + \mathbf{F}_V. \quad (108)$$

Man kann die Näherung

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} \approx \frac{T_v^*}{T_{v0}} - \frac{p^*}{p_0} \approx \frac{\theta_v^*}{\theta_{v0}} - \frac{c_{vd} p^*}{c_{pd} p_0} \quad (109)$$

benutzen, da sie im Einklang mit der Boussinesq-Approximation steht. Die Dichte ρ_0 ist die vertikal abhängige Dichte des Grundzustandes, deren Vertikalableitung man aber im mikroskaligen Turbulenzfeld vernachlässigen kann. Aufgrund der Boussinesq-Approximation sind Reynolds- und Hesselbergmittel äquivalent. Mittelt man die Bewegungsgleichung und

zieht man dann die gemittelte Gleichung von (108) ab, so resultiert eine prognostische Gleichung für die Geschwindigkeitsstörung \mathbf{v}'' :

$$\frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial t} + \mathbf{v}'' \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}'' + \mathbf{v}'' \cdot \nabla \mathbf{v}'' + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}'' = \quad (110)$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \nabla p'' + g \left(\frac{\theta_v''}{\theta_{v0}} - \frac{c_{vd} p''}{c_{pd} p_0} \right) \mathbf{k} + \mathbf{v}'' \cdot \widehat{\nabla} \mathbf{v}'' + \mathbf{F}_V'' .$$

Der Druckbeitrag im Auftriebsterm kann bei mikroskaligen Wirbeln vernachlässigt werden. Die skalare Multiplikation dieser Gleichung mit \mathbf{v}'' und anschließender Mittelung führt zu:

$$\frac{\partial \hat{e}_T}{\partial t} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \hat{e}_T = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{v}'' \cdot \widehat{\nabla} p'' + \frac{g}{\theta_{v0}} \theta_v'' \widehat{w}'' - \widehat{\mathbf{v}'' \mathbf{v}''} : \nabla \hat{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \widehat{\mathbf{v}'' e_T} + \mathbf{v}'' \cdot \widehat{\mathbf{F}}_V'' , \quad (111)$$

wobei $\hat{e}_T = 1/2(\widehat{\mathbf{v}''^2})$ die mittlere turbulente kinetische Energiedichte bezeichnet. Der erste Term auf der rechten Seite kann noch aufgrund der Divergenzfreiheit (Boussinesq-Approximation) umgeformt werden zu:

$$-\frac{1}{\rho_0} (\mathbf{v}'' \cdot \widehat{\nabla} p'') = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \widehat{\mathbf{v}'' p''} \right) . \quad (112)$$

Dieser Term beschreibt demnach eine räumliche Umverteilung der turbulenten kinetischen Energie.

Der letzte Term in Gleichung (111) beschreibt die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie. Diese ist gleichzusetzen mit dem negativen Wert der Dissipationserwärmung $\hat{\Phi}$ in Gl. (45), da die molekulare Viskosität der zeitlich gemittelten Strömung vernachlässigt wurde. Insgesamt ergibt sich also Gleichung (111) zu

$$\frac{\partial \hat{e}_T}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\hat{\mathbf{v}} \hat{e}_T + \frac{1}{\rho_0} \widehat{\mathbf{v}'' p''} + \widehat{\mathbf{v}'' e_T} \right) = \frac{g}{\theta_{v0}} \theta_v'' \widehat{w}'' - \widehat{\mathbf{v}'' \mathbf{v}''} : \nabla \hat{\mathbf{v}} - \hat{\Phi} . \quad (113)$$

Eine Schließung 1. Ordnung wird durch die Annahme möglich, dass die TKE-Erzeugungsterme und der Dissipationsterm in (113) sich exakt balancieren. Mit den Schließungsansätzen (103) und (106) folgt dann:

$$0 = -\kappa \frac{g}{\theta_{v0}} \frac{\partial \hat{\theta}_v}{\partial z} + \nu \left(\nabla \hat{\mathbf{v}} + [\nabla \hat{\mathbf{v}}]^T \right) : \nabla \hat{\mathbf{v}} - \hat{\Phi} . \quad (114)$$

In den folgenden Gleichungen wird der Mittelungsoperator $\widehat{(\cdot)}$ wieder weggelassen.

Den Term $S = \sqrt{(\nabla \mathbf{v} + [\nabla \mathbf{v}]^T) : \nabla \mathbf{v}}$ bezeichnet man als Deformation der Strömung. Das Quadrat der Deformation berechnet sich aus dem inneren Produkt von dem Deformationstensor (siehe (105)) und dem Geschwindigkeitsgradienten. In Zylinderkoordinaten bei Annahme von axialer Symmetrie erhält man

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} = & \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial w}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z \\ & - \frac{v}{r} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_r + \frac{u}{r} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\lambda \\ & + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z . \end{aligned} \quad (115)$$

Daher berechnet man für die Deformation zum Quadrat:

$$S^2 = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{u^2}{r^2} + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 . \quad (116)$$

Offenbar ist dieser Ausdruck positiv, wodurch eine reelle Deformation resultiert.

Nun kann im Modell die Dissipation Φ nicht durch molekulare Viskosität beschrieben werden, da die noch aufgelösten Wirbel zu hohe Durchmesser besitzen, um von den molekularen Prozessen beeinflusst zu werden. Stattdessen wird in der Natur die turbulente kinetische Energie in einer Kaskade an immer kleinere Wirbel weitergegeben. In diesem sogenannten Trägheitsbereich liegt die Kolmogorov Spektralverteilung

$$\mathcal{E} = \alpha_K \Phi^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (117)$$

vor (siehe z.B. Oertel 2002), wobei k die Wellenzahl der turbulenten Wirbel, $\mathcal{E} dk$ die turbulente kinetische Energie im Wellenzahlintervall dk und α_K die Kolmogorov Konstante bezeichnen. Integriert man diese Verteilung über den Bereich der nicht mehr aufgelösten Wirbel, so ergibt sich für die turbulente kinetische Energie e_T im Wellenzahlbereich $0 \leq k \leq k_G$

$$e_T = \frac{3}{2} \alpha_K \Phi^{\frac{2}{3}} k_G^{-\frac{2}{3}} , \quad (118)$$

wobei k_G die Wellenzahl des gerade noch aufgelösten Wirbels bezeichnet. Es ist sinnvoll, diese Wellenzahl mit $1/\Delta s$ gleichzusetzen, wobei Δs die Größenordnung des Gitterpunktabstands im Modell ist. Dann erhält man für die Dissipation

$$\Phi = \left(\frac{3}{2} \alpha_K \right)^{-\frac{3}{2}} e_T^{\frac{3}{2}} / \Delta s . \quad (119)$$

Eine solche Beziehung hätte man auch mit einer Dimensionsanalyse gefunden, wenn man für Φ nur eine Abhängigkeit von e_T und Δs angesetzt hätte. Nun muss noch e_T als Funktion

von bekannten Parametern beschrieben werden. Nimmt man an, dass e_T nur von dem Austauschkoeffizienten ν und der Längenskala Δs abhängt⁴, so erhält man mit einer Dimensionsanalyse:

$$e_T = C_m \nu^2 / \Delta s^2, \quad (120)$$

wobei C_m eine Konstante ist. Folglich kann man mit dieser Beziehung und (118) die Relation (114) ausdrücken als

$$\nu^3 / (C_\Delta \Delta s)^4 = \nu S^2 - \kappa \frac{g}{\theta_{v0}} \frac{\partial \theta_v}{\partial z}, \quad (121)$$

wobei C_Δ eine Konstante ist. Man nimmt nun die Proportionalität zwischen den turbulenten Austauschkoeffizienten ν und κ an, $\nu = \sigma \kappa$. σ wird als Prandtl-Zahl bezeichnet, und in der numerischen Modellierung werden für σ typischerweise feste Werte im Bereich von $1 < \sigma < 3$. werden. Man kann jetzt die Gleichung (121) leicht nach ν auflösen mit dem Ergebnis:

$$\nu = (C_\Delta \Delta s)^2 \sqrt{1 - \text{Ri} / \sigma} S, \quad (122)$$

wobei Ri die Richardson-Zahl

$$\text{Ri} = \frac{g}{\theta_{v0} S^2} \frac{\partial \theta_v}{\partial z} \quad (123)$$

bezeichnet. Für $\text{Ri} > \sigma$ (stabile Schichtung) verschwindet in diesem Modell die Turbulenz komplett. Bei instabiler Schichtung treten negative Richardson-Zahlen auf, und die Turbulenz wird verstärkt.

Im Fall einer feuchtlabilen Schichtung ist die Anwendung von (123) jedoch nicht zweckmäßig, weil Feuchtlabilität meistens mit $\text{Ri} > 0$ zusammenhängt. Daher ist es sinnvoll, im Fall von Wolkenluft eine modifizierte Richardson-Zahl Ri_s zu verwenden. Die modifizierte Richardson-Zahl lässt sich folgendermaßen begründen, wobei zum besseren Verständnis der Mittelungsoperator $\widehat{(\cdot)}$ wieder angeführt wird.

In untersättigter Luft resultiert die turbulente Abweichung der virtuellen potentiellen Temperatur θ_v'' hauptsächlich aus dem Advektionsterm $w'' \partial \hat{\theta}_v / \partial z$, da θ_v näherungsweise eine Erhaltungsgröße ist und der Vertikalgradient von θ_v dominiert. Daher ist es sinnvoll die

⁴Aus dem Parametrisierungsansatz (103) kann man durch Bildung des Skalarprodukts $\widehat{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{v}''}$ ableiten, dass die mittlere turbulente kinetische Energie proportional zur Divergenz der mittleren Strömung ist. Diese Beziehung ist allerdings wenig sinnvoll, da beispielsweise in einer inkompressiblen Flüssigkeit die Divergenz verschwindet und daher überhaupt keine Turbulenz auftreten könnte. Aus diesem Grunde müsste der Ansatz (103) korrigiert werden, worauf hier allerdings verzichtet wird.

Auftriebsproduktion von e_T , also $g\widehat{w''\theta''_v}/\theta_{v0}$, analog zu (114) zu parametrisieren. In Wolkenluft muss allerdings die Erwärmung aufgrund von Kondensation bzw. die Abkühlung aufgrund von Verdunstung berücksichtigt werden. In diesem Fall bleibt die äquivalent potentielle Temperatur

$$\theta_e = \theta \exp\left(\frac{l_v m_{vs}}{c_{pd} T}\right) \approx \theta \left(1 + \frac{l_v m_{vs}}{c_{pd} T}\right) = \theta + \frac{l_v}{c_{pd} \hat{\Pi}} m_{vs} \quad (124)$$

näherungsweise erhalten. Folglich wird θ''_e im Wesentlichen durch $w'' \partial \hat{\theta}_e / \partial z$ verursacht. Für die Schließung in Wolkenluft sollte also der Zusammenhang zwischen θ''_e und θ''_v hergestellt werden. Bei Vernachlässigung von Druckstörungen folgt für die turbulente Abweichung von $\hat{\theta}_e$:

$$\theta''_e = \theta'' + \frac{l_v}{c_{pd} \hat{\Pi}} m''_{vs} \quad (125)$$

Die turbulente Abweichung von \hat{m}_{vs} hängt aufgrund der Clausius-Clapeyron-Gleichung (89) mit der Abweichung der potentiellen Temperatur zusammen. Es ergibt sich näherungsweise

$$m''_{vs} = \frac{l_v \hat{m}_{vs}}{R_v \hat{T}^2} \hat{\Pi} \theta'' \quad (126)$$

Einsetzen dieser Beziehung in (125) führt zu

$$\theta''_e = \left(1 + \frac{l_v^2 \hat{m}_{vs}}{c_{pd} R_v \hat{T}^2}\right) \theta'' \quad (127)$$

Die turbulente Abweichung der potentiellen Temperatur lässt sich über (8) mit der turbulenten Abweichung der virtuellen Temperatur in Verbindung setzen:

$$\begin{aligned} \theta''_v &\approx \theta'' + \theta_0 ((1/\epsilon - 1) m''_{vs} - m''_c - m''_r) \\ &\approx \left(1 + \frac{(1/\epsilon - 1) l_v \hat{m}_{vs}}{R_v \hat{T}}\right) \theta'' - (m''_c + m''_r) \theta_0 \\ &= \frac{1 + (1/\epsilon - 1) l_v \hat{m}_{vs} / (R_v \hat{T})}{1 + l_v^2 \hat{m}_{vs} / (c_{pd} R_v \hat{T}^2)} \theta''_e - (m''_c + m''_r) \theta_0 \end{aligned} \quad (128)$$

Bei der vorletzten Umformung wurde (126) verwendet. Insgesamt erhält man also nach Anwendung der Flussgradientbeziehung (106) für die Auftriebsproduktion in Wolkenluft

$$\frac{g}{\theta_{v0}} \widehat{w''\theta''_v} = -\kappa \frac{g}{\theta_{v0}} A \frac{\partial \hat{\theta}_e}{\partial z} + \kappa \frac{g}{\theta_{v0}} \theta_0 \left(\frac{\partial \hat{m}_c}{\partial z} + \frac{\partial \hat{m}_r}{\partial z} \right), \quad (129)$$

wobei

$$A = \frac{1 + (1/\epsilon - 1)l_v\hat{m}_{vs}/(R_v\hat{T})}{1 + l_v^2\hat{m}_{vs}/(c_{pd}R_v\hat{T}^2)}. \quad (130)$$

Die modifizierte Richardson-Zahl lautet demnach

$$Ri_s = \frac{g}{\theta_{vo}S^2} \left[A \frac{\partial\theta_e}{\partial z} - \theta_0 \frac{\partial(m_c + m_r)}{\partial z} \right]. \quad (131)$$

Somit berechnet sich der turbulente Austauschkoeffizient ν für Impuls über

$$\nu = \begin{cases} (C_\Delta\Delta_s)^2\sqrt{1 - Ri_s/\sigma S} & \text{für } m_v = m_{vs} \\ (C_\Delta\Delta_s)^2\sqrt{1 - Ri/\sigma S} & \text{für } m_v < m_{vs} \end{cases}. \quad (132)$$

Jetzt wird bei Sättigung und Feuchtlabilität die modifizierte Richardson-Zahl Ri_s negativ, so dass der Austauschkoeffizient ν in diesem Fall sehr viel höhere Werte annimmt als bei der Verwendung von der Richardson-Zahl Ri , welche auch bei Feuchtlabilität positive Werte aufweisen kann.

Die Durchführung von numerischen Modellsimulationen hat jedoch gezeigt, dass die Schließung (132) zu unrealistischen Ergebnissen führen kann. Die Turbulenz verschwindet nach dieser Schließung, wenn die Richardson-Zahl Ri bzw. Ri_s die Prandtl-Zahl σ überschreitet. Das tritt in den Simulationen bereits unter solchen Bedingungen auf, die in der realen Atmosphäre mit ausgeprägter Mikroturbulenz verbunden ist. Insbesondere ist die planetare Grenzschicht von diesem Modellfehler betroffen. Die Ursache ist in der zu geringen vertikalen Auflösung zu sehen. Dadurch werden Vertikalscherungen prognostiziert, welche zu gering sind und eine falsche Richardson-Zahl ergeben. Den Fehler kann man verringern, indem man einen Korrekturfaktor $0 < \gamma < 1$ einführt. Daher wird anstelle der Richardson-Zahl Ri bzw. Ri_s die korrigierte Richardson-Zahl γRi bzw. γRi_s in (132) eingesetzt. Der Wert von γ ist hinsichtlich der Problemstellung und Gitterpunktauflösung anzupassen.

Nun müssen noch die turbulenten Flüsse an den Berandungen parametrisiert werden. Am oberen Rand wird einfach angenommen, dass die vertikalen turbulenten Flüsse verschwinden, da dieser künstliche Rand ohnehin außerhalb der relevanten Modellregion liegen soll. Am unteren Rand ($z = 0$) würde allerdings die einfache Verwendung einer Haftbedingung $\mathbf{v} = 0$ sowie $G = G_s$ für die Größe G die Realität im Modell schlecht wiedergeben, da erstens am unteren Rand molekulare Austauschprozesse wichtig sind, die im Modell fehlen, und zweitens die oberflächennahe Schicht aus numerischen Gründen nicht sehr genau

aufgelöst werden kann. Folglich behilft man sich mit empirisch bestimmten Widerstandsgesetzen, welche die vertikalen turbulenten Flüsse in der bodennahen Schicht angeben. Diese Gesetze sind für $z = 0$ durch

$$F_{uz}/\rho = -\nu \frac{\partial u}{\partial z} = -C_D \sqrt{\mathbf{v}_{10m}^2} u_{10m} , \quad (133)$$

$$F_{vz}/\rho = -\nu \frac{\partial v}{\partial z} = -C_D \sqrt{\mathbf{v}_{10m}^2} v_{10m} , \quad (134)$$

$$F_{wz}/\rho = 0 , \quad (135)$$

$$F_{\theta z}/\rho = -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} = C_E \sqrt{\mathbf{v}_{10m}^2} (\theta_s - \theta_{10m}) , \quad (136)$$

$$F_{m_v z}/\rho = -\kappa \frac{\partial m_v}{\partial z} = C_E \sqrt{\mathbf{v}_{10m}^2} (m_{vss} - m_{v10m}) , \quad (137)$$

$$F_{m_c z}/\rho = 0 , \quad (138)$$

$$F_{m_r z}/\rho = 0 \quad (139)$$

gegeben. Der Index s symbolisiert, dass es sich um Werte an der unteren Berandungsfäche handelt. Der Index $10m$ deutet an, dass die Größe in 10m über der Oberfläche ermittelt wurde. Praktisch sind die Werte bei 10m im Modell nicht bekannt, so dass man die Werte des untersten Modellgitterpunktes verwendet. In diesen Formeln bezeichnen C_D und C_E die Oberflächenaustauschkoeffizienten. Sie werden hier als konstant angenommen. Der turbulente Fluss vom Wasserdampf wird schließlich gleichgesetzt mit dem molekularen Wasserdampffluss E , so dass

$$E_s = E|_{z=0} = (F_{m_v z})|_{z=0} . \quad (140)$$

An den seitlichen Rändern $r = 0$ und $r = R$ wird das Verschwinden der radialen turbulenten Flüsse gefordert. Bei $r = 0$ ist das ohnehin der Fall, da dort aufgrund der axialen Symmetrie die Radialgeschwindigkeit identisch Null ist.

Die Dissipation beschreibt die Umwandlung von turbulenter Energie in innere Energie. Diese Umwandlungsrate Φ wird für die θ -Gleichung (62) benötigt. Mit der Beziehung (121) erhält man

$$\Phi = \frac{\nu^3}{(C_\Delta \Delta s)^4} \quad (141)$$

In der untersten Modellschicht wird die Dissipation hauptsächlich durch die turbulenten Oberflächenflüsse bestimmt. Die Beziehung (141) wäre dort unangemessen. Deshalb nutzt man die Tatsache, dass die Auftriebsproduktion in Oberflächennähe vernachlässigbar klein ist. Dann kann die Dissipation Φ nach (121) mit νS^2 gleichgesetzt werden. νS^2 kann noch durch

$$\nu S^2 = \nu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) = C_D \sqrt{\mathbf{v}_{10m}^2} \left(u_{10m} \frac{\partial u}{\partial z} + v_{10m} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \text{bei } z = 0 \quad (142)$$

approximiert werden, weil man in unmittelbarer Nähe der Oberfläche den Vertikalwind vernachlässigen kann und die vertikale Änderung des Horizontalwindes über die horizontalen Änderungen dominiert; des weiteren wurden in (142) die Beziehungen (133) und (134) verwendet.

5. Strahlung

Das Modell enthält noch keine physikalisch fundierte Parametrisierung der Strahlungserwärmungsrate Q_R . Stattdessen wird wie in dem Modell von Rotunno und Emanuel (1987) eine künstliche Dämpfung eingesetzt ("Newtonian Cooling"), welche die Form

$$\frac{Q_R}{c_{pd}\Pi} = -\frac{\theta - \theta_E}{\tau_R} \quad (143)$$

besitzt, wobei θ_E die potentielle Strahlungsgleichgewichtstemperatur und τ_R die Relaxationszeit bezeichnet. So wird die potentielle Temperatur bei Abwesenheit von anderen Prozessen mit der Zeitrates τ_R an die potentielle Gleichgewichtstemperatur θ_E angepasst. Die Strahlungsgleichgewichtstemperatur θ_E wird in dem Modell mit der potentiellen Temperatur θ_0 des Grundzustandes gleichgesetzt. Dieses wird so festgelegt, dass ein einigermaßen realistisches Temperaturprofil resultiert, das allerdings von der stationären Lösung der Strahlungstransportgleichung abweichen kann. Somit werden in dem Modell lediglich einige Strahlungseffekte (z.B. die Strahlungsabkühlung von Konvektionswolken in der oberen Troposphäre) grob beschrieben. Die Zeitrates τ_R beträgt in der Standardkonfiguration des Modells 12 Stunden.

6. Numerisches Lösungsverfahren

6.1. Räumliche Differenzenformulierung

Zur numerischen Lösung werden die Gleichungen an Gitterpunkten diskretisiert. Das räumliche Gitter orientiert sich an dem, welches von Rotunno und Emanuel (1987) verwendet wurde. Das Gitter ist versetzt, d.h. die einzelnen Modellvariablen werden an Gitterpunkten betrachtet, die zueinander versetzt sein können. Man unterscheidet halb- und ganzzahlige Gitterpunkte. Die Radien der halb- und ganzzahligen Gitterpunkte sind jeweils durch

$$r_m = m\Delta r \text{ für } m = 0, 1, \dots, M \text{ und } r_{m-1/2} = (m - 1/2)\Delta r \text{ für } m = 1, \dots, M \quad (144)$$

gegeben, wobei $\Delta r = R/M$ den radialen Gitterpunktsabstand bezeichnet. Entsprechend werden in vertikaler Richtung die Gitterpunkte durch

$$z_n = n\Delta z \text{ für } n = 0, 1, \dots, N \text{ und } z_{n-1/2} = (n - 1/2)\Delta z \text{ für } n = 1, \dots, N \quad (145)$$

festgelegt, wobei $\Delta z = H/N$. Dabei werden alle Variablen bis auf die Geschwindigkeitskomponenten u und w an halbzahligen Gitterpunkten betrachtet. Die Geschwindigkeitskomponente u (w) wird dagegen an ganzzahligen (halbzahligen) Radien und halbzahligen (ganzzahligen) Höhen betrachtet. Im Folgenden bedeutet die Schreibweise $G_{j,k}$, dass die Größe G beim Radius r_j und in der Höhe z_k zu bestimmen ist. Zudem werden die Abkürzungen $n_h = n - \frac{1}{2}$ und $m_h = m - \frac{1}{2}$ verwendet.

Die Bewegungsgleichungen an den Gitterpunkten schreiben sich dann in Differenzenform

$$\frac{1}{\overline{(\rho)}_{m,n_h}^r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{(\rho)}_{m,n_h}^r u_{m,n_h} \right) + f_{m,n_h}^u - \left(\frac{v^2}{r} + fv \right)_{m,n_h}^r = -c_{pd} \overline{(\theta_v)}_{m,n_h}^r \delta_r (\Pi^*)_{m,n_h} + D_{um,n_h} \quad (146)$$

für $m = 0, 1, \dots, M$ und $n = 1, 2, \dots, N$,

$$\frac{1}{\rho_{m_h,n_h}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{m_h,n_h} v_{m_h,n_h}) + f_{m_h,n_h}^v + \left(\frac{v_{m_h,n_h}}{r_{m_h}} + f \right) \frac{\overline{(ru)}_{m_h,n_h}^r}{r_{m_h}} = D_{vm_h,n_h} \quad (147)$$

für $m = 1, 2, \dots, M$ und $n = 1, 2, \dots, N$,

$$\frac{1}{\overline{(\rho)}_{m_h,n}^z} \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{(\rho)}_{m_h,n}^z w_{m_h,n} \right) + f_{m_h,n}^w = -c_{pd} \overline{(\theta_v)}_{m_h,n}^z \delta_z (\Pi^*)_{m_h,n} + B_{m_h,n} + D_{wm_h,n}$$

$$\text{für } m = 1, 2, \dots, M \text{ und } n = 0, 1, \dots, N, \quad (148)$$

wobei die Mittelungsoperatoren durch

$$\overline{(G)}_{j,k}^r = \frac{1}{2} (G_{j-1/2,k} + G_{j+1/2,k}) \quad \text{sowie} \quad \overline{(G)}_{j,k}^z = \frac{1}{2} (G_{j,k-1/2} + G_{j,k+1/2}), \quad (149)$$

und die Differenzenoperatoren durch

$$\delta_r (G)_{j,k} = \frac{G_{j+1/2,k} - G_{j-1/2,k}}{\Delta r} \quad \text{sowie} \quad \delta_z (G)_{j,k} = \frac{G_{j,k+1/2} - G_{j,k-1/2}}{\Delta z} \quad (150)$$

definiert sind.

In den Gleichungen (146)-(148) bezeichnen f^u , f^v und f^w den jeweiligen Advektionsterm in Differenzenform und B den Auftrieb. Die Gleichungen werden in Flussform gelöst. Daher tritt anstelle des Advektionsterms die Divergenz des advektiven Flusses. Hierdurch wird die Erhaltung von integralen Größen wie z.B. der Masse besser angenähert. Die Flussdivergenzterme lauten in Differenzenform:

$$\overline{(\rho)}_{m,n_h}^r f_{m,n_h}^u = \frac{1}{r_m} \delta_r \left(\overline{(ru\bar{\rho}^r)}^r \bar{u}^r \right)_{m,n_h} + \delta_z \left(\frac{1}{r} \overline{(rw\bar{\rho}^z)}^r \bar{u}^z \right)_{m,n_h}, \quad (151)$$

$$\rho_{m_h,n_h} f_{m_h,n_h}^v = \frac{1}{r_{m_h}} \delta_r (ru\bar{\rho}^r \bar{v}^r)_{m_h,n_h} + \delta_z (w\bar{\rho}^z \bar{v}^z)_{m_h,n_h}, \quad (152)$$

$$\overline{(\rho)}_{m_h,n}^z f_{m_h,n}^w = \frac{1}{r_{m_h}} \delta_r \left(r \overline{(u\bar{\rho}^r)}^z \bar{w}^r \right)_{m_h,n} + \delta_z \left(\overline{(w\bar{\rho}^z)}^z \bar{w}^z \right)_{m_h,n}. \quad (153)$$

Liegt ein Gitterpunkt außerhalb der Modellregion, so ist das Mittel mit dem Term gleichzusetzen, der noch innerhalb oder am Rand der Modellregion liegt. Beispielsweise berechnet man $\overline{(u\bar{\rho}^r)}_{m,0}^z = u_{m,1}(\bar{\rho}^r)_{m,1}$.

Als Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponenten werden Werte für u im Zentrum und am radialen Rand benötigt und Werte für w am oberen und unteren Rand. Der Radialwind u möge an den seitlichen Rändern, also im Zentrum und am äußeren Rand verschwinden(siehe Gln. (67) und (68)):

$$u_{0,n_h} = 0, \quad u_{M,n_h} = 0. \quad (154)$$

Die baryzentrische Vertikalgeschwindigkeit verschwindet am oberen Rand und ist am unteren Rand eine Funktion der Massentransporte (siehe Gln. (49) und (66)); in diskretisierter Form erhält man:

$$w_{m_h,0} = \frac{3}{2} m_r m_{h,\frac{1}{2}} W_{m_h,\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} m_r m_{h,\frac{3}{2}} W_{m_h,\frac{3}{2}} + \left(\frac{E_s}{\rho} \right)_{m_h,0}, \quad w_{m_h,N} = 0. \quad (155)$$

Da der Massenbruch m_r sowie die Sedimentationsgeschwindigkeit W nur auf halben Flächen vorliegen, wurde in (155) eine lineare Extrapolation zur Oberfläche $z = 0$ durchgeführt.

Die in den Auftrieb eingehenden Größen sind auf halben Höhenflächen gegeben, während der Auftrieb selbst auf ganzen Höhenflächen benötigt wird. Daher wird folgende Mittelung bei der Berechnung des Auftriebs auf ganzen Höhenflächen durchgeführt:

$$B_{m_h,n} = \frac{g}{\theta_{0n}} \left(\overline{(\theta^*)}_{m_h,n}^z + \frac{\overline{(\theta)}_{m_h,n}^z \left(\left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \overline{(m_v^*)}_{m_h,n}^z - \overline{(m_c + m_r)}_{m_h,n}^z \right)}{1 + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) m_{v0n}} \right) \quad (156)$$

Nun verbleibt noch die Differenzenformulierung für die turbulenten Austauschterme. Der turbulente Austauschkoefizient wird auf ganzen Höhenflächen berechnet. Die Deformation wird durch folgende Differenzenform repräsentiert

$$(S^2)_{m_h,n} = 2 \overline{(\delta_r u)^2}_{m_h,n}^z + \frac{2}{r_{m_h}^2} \overline{((u)^r)^2}_{m_h,n}^z + 2 \overline{(\delta_z w)^2}_{m_h,n}^z + \overline{((\delta_z u + \delta_r w)^2)^r}_{m_h,n} + \overline{\left(\left(\left(\delta_r v - \frac{\bar{v}^r}{r} \right)^2 \right)^r \right)_{m_h,n}^z} + (\delta_z v)_{m_h,n}^2. \quad (157)$$

In untersättigter Luft ergibt sich daraus die Richardson-Zahl nach (123) als

$$\text{Ri}_{m_h,n} = \frac{g}{\theta_{v0n} (S^2)_{m_h,n}} (\delta_z \theta_v)_{m_h,n}, \quad (158)$$

und in gesättigter Luft erhält man (siehe Gl.(131))

$$(\text{Ri}_s)_{m_h,n} = \frac{g}{\theta_{v0n} (S^2)_{m_h,n}} \left(\bar{A}_{m_h,n}^z \delta_z (\theta_e)_{m_h,n} - \theta_{0n} \delta_z (m_c + m_r)_{m_h,n} \right). \quad (159)$$

Somit berechnet sich der turbulente Austauschkoefizient zu

$$\nu_{m_h,n} = \begin{cases} C_{\Delta}^2 \Delta r \Delta z \sqrt{1 - \gamma (\text{Ri}_s)_{m_h,n} / \sigma} \sqrt{(S^2)_{m_h,n}} & \text{für } m_v \geq m_{vs} \\ C_{\Delta}^2 \Delta r \Delta z \sqrt{1 - \gamma \text{Ri}_{m_h,n} / \sigma} \sqrt{(S^2)_{m_h,n}} & \text{für } m_v < m_{vs} \end{cases}. \quad (160)$$

Für C_Δ werden in der Literatur (z.B. Lilly 1962, Soong und Ogura 1973 oder Rotunno und Emanuel 1987) unterschiedliche Werte zwischen 0.16 und 0.5 angegeben. Bei einem geringen Gitterpunktabstand bietet sich ein hoher Wert an, um numerische Probleme zu vermeiden, während für ein grobes Gitter ein niedrigerer Wert ausreicht. Falls sich für $\nu_{m_h,n}$ ein Austauschkoefizient ergibt, der kleiner als ein vorgegebener Minimalwert ν_{min} ist, so wird $\nu_{m_h,n}$ mit diesem Minimalwert neu belegt, um numerische Probleme zu vermeiden.

Für die Berechnung der turbulenten Impulsaustauschterme werden zunächst die Elemente des Reynolds-Spannungstensors bestimmt:

$$(\tau_{uu})_{m_h,n_h} = 2\overline{(\nu)}_{m_h,n_h}^z (\delta_r u)_{m_h,n_h} , \quad (161)$$

$$(\tau_{vv})_{m,n_h} = 2\overline{(\nu)}_{m,n_h}^z \frac{u_{m,n_h}}{r_m} , \quad (162)$$

$$(\tau_{ww})_{m_h,n_h} = 2\overline{(\nu)}_{m_h,n_h}^z (\delta_z w)_{m_h,n_h} , \quad (163)$$

$$(\tau_{uv})_{m,n_h} = \overline{(\nu)}_{m,n_h}^z \left((\delta_r v)_{m,n_h} - \frac{\bar{v}_{m,n_h}^r}{r_m} \right) , \quad (164)$$

$$(\tau_{uw})_{m,n} = \overline{(\nu)}_{m,n}^z ((\delta_z u)_{m,n} + (\delta_r w)_{m,n}) , \quad (165)$$

$$(\tau_{vw})_{m_h,n} = \nu_{m_h,n} (\delta_z v)_{m_h,n} . \quad (166)$$

In diesen Gleichungen bezeichnet τ_{v_1,v_2} das Element $-\widehat{v_1''v_2''}$ des Reynolds-Spannungstensors.

Die Randbedingungen lauten:

$$(\tau_{uw})_{m,0} = C_D \left(\sqrt{(\bar{u}^r)^2 + v^2} \right)_{m,1/2}^z u_{m,1/2} , \quad (167)$$

$$(\tau_{vw})_{m_h,0} = C_D \left(\sqrt{(\bar{u}^r)^2 + v^2} \right)_{m_h,1/2}^z v_{m_h,1/2} . \quad (168)$$

Alle sonstigen Spannungen verschwinden an den seitlichen und horizontalen Berandungen.

Für die turbulenten Austauschterme erhält man schließlich in Differenzenform

$$D_{um,n_h} = \frac{1}{r_m} \delta_r (r\tau_{uu})_{m,n_h} + \delta_z (\tau_{uw})_{m,n_h} - \frac{(\tau_{vv})_{m,n_h}}{r_m} , \quad (169)$$

$$D_{vm_h, n_h} = \frac{1}{r_{m_h}^2} \delta_r \left(r^2 \tau_{uv} \right)_{m_h, n_h} + \delta_z (\tau_{vw})_{m_h, n_h} , \quad (170)$$

$$D_{wm_h, n} = \frac{1}{r_{m_h}} \delta_r (r \tau_{uw})_{m_h, n} + \delta_z (\tau_{ww})_{m_h, n} . \quad (171)$$

Die übrigen Modellvariablen werden stets auf halben Gitterpunkten betrachtet. Somit lautet die Differenzenformulierung für die verbleibenden prognostischen Gleichungen:

$$\frac{\partial \rho_{m_h, n_h}^*}{\partial t} + \frac{1}{r_{m_h}} \delta_r (r u \bar{\rho}^r)_{m_h, n_h} + \delta_z (w \bar{\rho}^z)_{m_h, n_h} = 0$$

für $m = 1, 2, \dots, M$ und $n = 1, 2, \dots, N$, (172)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_{m_h, n_h}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{m_h, n_h} \theta_{m_h, n_h}^* \right) + f_{m_h, n_h}^\theta \\ &= - \frac{1}{(c_p \rho \Pi)_{m_h, n_h}} \left(l_v Q_v + (c_{pd} J_d + c_{pv} J_v + c_{pl} (J_c + J_r)) \overline{(\delta_z T)^z} \right)_{m_h, n_h} \\ &+ \left(\frac{Q_R + \Phi}{c_p \Pi} \right)_{m_h, n_h} + D_{\theta} \quad \text{für } m = 1, 2, \dots, M \text{ und } n = 1, 2, \dots, N , \end{aligned} \quad (173)$$

$$\frac{1}{\rho_{m_h, n_h}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{m_h, n_h} m_{vm_h, n_h}^* \right) + f_{m_h, n_h}^{m_v} = \left(\frac{Q_v}{\rho} \right)_{m_h, n_h} - \frac{1}{\rho_{m_h, n_h}} \overline{(\delta_z J_v^*)^z} + D_{m_v} \quad \text{für } m = 1, 2, \dots, M \text{ und } n = 1, 2, \dots, N , \quad (174)$$

$$\frac{1}{\rho_{m_h, n_h}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{m_h, n_h} m_{cm_h, n_h} \right) + f_{m_h, n_h}^{m_c} = \left(\frac{Q_c}{\rho} \right)_{m_h, n_h} - \frac{1}{\rho_{m_h, n_h}} \overline{(\delta_z J_c)^z} + D_{m_c} \quad \text{für } m = 1, 2, \dots, M \text{ und } n = 1, 2, \dots, N , \quad (175)$$

$$\frac{1}{\rho_{m_h, n_h}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{m_h, n_h} m_{rm_h, n_h} \right) + f_{m_h, n_h}^{m_r} = \left(\frac{Q_r}{\rho} \right)_{m_h, n_h} - \frac{1}{\rho_{m_h, n_h}} \overline{(\delta_z J_r)^z} + D_{m_r} \quad \text{für } m = 1, 2, \dots, M \text{ und } n = 1, 2, \dots, N . \quad (176)$$

Dabei ist der Diffusionsfluss J_v^* definiert durch

$$J_v^* = \begin{cases} J_v & \text{für } z > 0, \\ J_v - E_s & \text{für } z = 0. \end{cases} \quad (177)$$

In Gleichung (174) wurde der Diffusionsfluss J_v^* anstelle von J_v verwendet, da an der Oberfläche ($z = 0$) der turbulente Wasserdampftransport F_{vz} mit dem molekularen Wasserdampftransport E_s gleichgesetzt wurde und somit bereits den Wasserdampftransport von der Oberfläche in die Atmosphäre vollständig beschreibt.

Die Divergenz des advektiven Flusses für die Variable G ist dabei durch

$$\rho_{m_h, n_h} f_{m_h, n_h}^G = \frac{1}{r_{m_h}} \delta_r (ru \bar{\rho}^r \bar{G}^r)_{m_h, n_h} + \delta_z (w \bar{\rho}^z \bar{G}^z)_{m_h, n_h} \quad (178)$$

gegeben, wenn für G keine Trennung zwischen Grundzustand und Abweichung vorgenommen wurde, und durch

$$\rho_{m_h, n_h} f_{m_h, n_h}^G = \frac{1}{r_{m_h}} \delta_r (ru \bar{\rho}^r \bar{G}^{*r})_{m_h, n_h} + \delta_z (w \bar{\rho}^z \bar{G}^{*z} + G_0^z)_{m_h, n_h} - G_0^{n_h} \delta_z (w \bar{\rho}^z)_{m_h, n_h}, \quad (179)$$

falls diese Trennung vorliegt.

Die Radial- und Vertikalkomponenten des turbulenten Flusses werden durch

$$(F_{Gr}/\rho)_{m, n_h} = -\frac{\overline{(\nu^z)^r}}{\sigma} (\delta_r G)_{m, n_h}, \quad (F_{Gz}/\rho)_{m_h, n} = -\frac{\nu_{m_h, n}}{\sigma} (\delta_z G)_{m_h, n} \quad (180)$$

beschrieben. An der Oberfläche ($z = 0$) werden die Flüsse, welche nicht verschwinden, durch

$$(F_{\theta z}/\rho)_{m_h, 0} = C_E \left(\sqrt{(\bar{u}^r)^2 + v^2} \right)_{m_h, 1/2} (\theta_s - \theta_{m_h, 1/2}), \quad (181)$$

$$(F_{m_v z}/\rho)_{m_h, 0} = C_E \left(\sqrt{(\bar{u}^r)^2 + v^2} \right)_{m_h, 1/2} (m_{vss} - m_{v m_h, 1/2}). \quad (182)$$

repräsentiert. Alle übrigen turbulenten Flüsse verschwinden an den Rändern. Der Verdunstungsfluss wird durch

$$E_{m_h, n_h} = \begin{cases} \frac{1}{2}(F_{m_v z})_{m_h, 0} & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (183)$$

festgelegt. Folglich wird die baryzentrische Geschwindigkeit nur am untersten Gitterpunkt von der Verdunstung beeinflusst.

Der turbulente Austauschterm D_G wird durch die Differenzenformulierung

$$(D_G)_{m_h, n_h} = -\frac{1}{r_{m_h}} \delta_r (r F_{Gr} / \rho)_{m_h, n_h} - \delta_z (F_{Gz} / \rho)_{m_h, n_h} \quad (184)$$

angenähert.

Die Dissipationsrate Φ berechnet sich durch

$$\Phi_{m_h, n_h} = \frac{\overline{\nu^3}^z_{m_h, n_h}}{C_{\Delta}^4 (\Delta r \Delta z)^2} \quad \text{für } n_h > 1 \quad (185)$$

oberhalb der untersten Modellschicht und durch

$$\Phi_{m_h, 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_{m_h, 1}^3}{C_{\Delta}^4 (\Delta r \Delta z)^2} + 2 \frac{C_D}{\Delta z} \left((\overline{u^r})^2 + v^2 \right)_{m_h, 1/2}^{\frac{3}{2}} \right) \quad (186)$$

in der untersten Modellschicht. Dabei wurde in der untersten Modellschicht angenommen, dass in der unteren Hälfte der Schicht (z_0 bis $z_{1/2}$) die Dissipation sich über Gl.(142) berechnet, während in der oberen Hälfte der Schicht ($z_{1/2}$ bis z_1) Gl. (141) gültig sein soll. So ergibt sich in Gl.(186) die Dissipation aus dem vertikalen Mittelwert von Φ der beiden Schichthälften.

Die Auswertung der Zustandsgleichung (61) und aller wolkenmikrophysikalischen Umwandlungsterme erfolgt an halben Gitterpunkten.

Zusätzlich zur turbulenten Diffusion kann auch eine numerische Hyperdiffusion der Ordnung N_{HD} eingesetzt werden. Der Diffusionsterm besitzt die Gestalt:

$$D_{h,G} = k_{HD} (-1)^{N_{HD}-1} \nabla^{2N_{HD}} G . \quad (187)$$

Bei der Hyperdiffusion wird also der Laplace-Operator N_{HD} mal angewendet, wobei die Differenzenformulierung

$$(\nabla^2 G)_{m_h, n_h} = \frac{1}{r_{m_h} \Delta r^2} \delta_r (r \delta_r (G))_{m_h, n_h} + \frac{1}{\Delta z^2} \delta_z (\delta_z G)_{m_h, n_h} \quad (188)$$

verwendet wird.

Optional kann auch eine Dämpfung in der Nähe des oberen und des seitlichen Randes durchgeführt werden. So werden Schall- und Trägheitsschwerewellen effektiv abgeschwächt. Ohne Dämpfung werden diese Wellen an den Rändern reflektiert, was zu unrealistischen Effekten führt. Allen prognostischen Gleichungen (mit Ausnahme der Kontinuitätsgleichung) wird ein Dämpfungsterm der Gestalt

$$D_{RD,G} = -0.03 \left(\text{Max} \left(\frac{z - Z_s}{H - Z_s}, 0 \right)^3 + \text{Max} \left(\frac{r - 0.9R}{R - 0.9R}, 0 \right)^3 \right) (G - G_0) \quad (189)$$

hinzugefügt, wobei Z_s die Höhe des unteren Randes der Dämpfungsschicht bezeichnet.

6.2. Zeitliche Integration

Im Modell wird das Leap-Frog Zeitintegrationsschema angewendet. Das erfordert leider einen sehr kurzen Zeitschritt, da hochfrequente Schall- und Schwerewellen zeitlich aufgelöst werden müssen. Dieser Nachteil wird jedoch durch die Beschränkung auf zwei Raumdimensionen (Radius und Höhe) kompensiert, so dass hochauflösende Simulationen möglich werden. Die Modellvariable G^j wird beim Zeitintegrationsschema zum Zeitpunkt $t = j \Delta t$ betrachtet, wobei Δt die Länge des Zeitschritts bezeichnet und j eine ganze Zahl ist. Die prognostische Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial t} = F_1 + F_2 \quad (190)$$

wird mit dem Schema

$$G^{j+1} = \tilde{G}^{j-1} + 2\Delta t (F_1^j + F_2^{j-1}) \quad (191)$$

$$\text{mit } \tilde{G}^{j-1} = G^{j-1} + \beta (G^j - 2G^{j-1} + G^{j-2})$$

berechnet. Dabei bezeichnet F_1 den Anteil der Tendenz, welche zum Zeitpunkt $t = j \Delta t$ und F_2 den Anteil der Tendenz, welche zum Zeitpunkt $t = (j - 1) \Delta t$ betrachtet wird. Der Parameter β legt den Robert-Zeitfilter fest, der den aus der Zeitintegration resultierenden Lärm dämpft. Der Tendenzanteil F_1 enthält die Advektionsterme, die wolkenmikrophysikalischen Umwandlungsterme (außer der Kondensationsrate) und die einwirkenden

Kräfte. F_1 wird als Funktion von G^j berechnet. Der Tendenzanteil F_2 enthält die turbulenten Diffusionsterme, die Strahlung und alle sonstigen Terme inklusive Kondensationsrate. F_2 wird als Funktion der gefilterten Variablen \tilde{G}^{j-1} berechnet. In dieser Formulierung wirkt der Tendenzanteil F_2 stabilisierend auf die numerische Lösung. Die Länge des Zeitschrittes Δt richtet sich nach dem Gitterpunktsabstand. Für eine numerische Stabilität muss $\Delta t < \text{Min}(\Delta r, \Delta z)/c$ gelten, wobei c die maximal mögliche Geschwindigkeit im Modell darstellt, mit der sich Störungen verlagern können. Bei einem Gitterpunktsabstand von 500m muss der Zeitschritt kleiner als 1.5 Sekunden sein, wenn c die Schallgeschwindigkeit ist ($c \approx 330\text{m/s}$). Modellexperimente mit $\Delta r = \Delta z = 500\text{m}$ haben gezeigt, dass ein Zeitschritt von höchstens $\Delta t = 0.5$ Sekunden für eine stabile Integration gegeben sein muss.

Literatur

- Doms, G. und F. Herbert, 1985: Fluid- und Mikrodynamik in numerischen Modellen konvektiver Wolken. *Ber. Inst. Meteor. u. Geophys., Univ. Frankfurt a.M.*, **No.62**, 378 pp.
- Doms, G. und U. Schättler, 1999: The nonhydrostatic Limited-Area Model LM (Lokal-Modell) of DWD. Part I: Scientific Documentation. DWD (Deutscher Wetterdienst). GB Forschung und Entwicklung, 63004 Offenbach, Germany.
- Frisius, T., 2005: An atmospheric balanced model of an axisymmetric vortex with zero potential vorticity. *Tellus A*, **57**, 55-64.
- Frisius, T., 2006: Surface-flux-induced tropical cyclogenesis within an axisymmetric atmospheric balanced model. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, im Druck.
- Klemp, J. B. und R. B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.
- Holton, J.R., 1992: An Introduction to Dynamic Meteorology. Academic Press, San Diego, 511S.
- Herbert, F., 2000: Die thermische Bilanzgleichung - vom 1. Hauptsatz zur LM-Näherung. DWD Forschung und Entwicklung- Arbeitsergebnisse Nr. 66, Deutscher Wetterdienst.
- Kessler, E., 1969: On the distribution and continuity of water substance in atmospheric circulation. *Meteor. Monogr.*, **10**, No. 32, 84pp.
- Lilly, D. K., 1962: On the numerical simulation of buoyant convection. *Tellus*, **14**, 148-172.
- Oertel, H. (Hrsg.), 2002: Prandtl - Führer durch die Strömungslehre. Vieweg Verlag, Braunschweig, 11. Auflage, 704S.
- Rotunno R. und K. A. Emanuel, 1987: An air-sea interaction theory for tropical cyclones. Part II: Evolutinary study using a nonhydrostatic axisymmetric numerical model. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 542-561.
- Soong S. T. und Y. Ogura, 1973: A comparison between axisymmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893.
- Wacker, U. und F. Herbert, 2003: Continuity equations as expressions for local balances of masses in cloudy air. *Tellus A*, **55**, 247-254.
- Wacker, U., T. Frisius und F. Herbert, 2006: Evaporation and precipitation surface effects in local mass continuity laws of moist air. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 2642-2652.